ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 25/26 — 1992

Mécanismes bayésiens incitatifs : un survol informel de quelques résultats récents

Claude d'ASPREMONT, Jacques CRÉMER, Louis-André GÉRARD-VARET *

RÉSUMÉ. – Cet article présente une introduction à la littérature récente sur les mécanismes incitatifs bayésiens. Nous montrons que des mécanismes bayésiens incitatifs efficaces peuvent « presque toujours » être construits en ajoutant un mécanisme de GROVES et un mécanisme bayésien destiné à couvrir le déficit. Ceci nous permet de présenter une interprétation d'une condition, dite condition C, qui joue un rôle important dans la littérature. Dans la dernière partie de l'article, nous étudions l'implémentation de règles de décisions non efficaces, et présentons une discussion de conditions nécessaires et suffisantes pour que ceci soit possible.

Bayesian Incentive Compatible Mechanisms: A Survey of Recent Results

ABSTRACT. – This paper presents a survey of some recent results on Bayesian mechanisms. We show that efficient Bayesian mechanisms can "nearly always" be constructed by adding a Groves mechanisms and a Bayesian mechanism whose only aim is to balance the budget. In so doing, we present an interpretation of a condition – called condition C – which plays an important role in the literature. The last part of the paper is focussed on the implementation of non efficient decision rules, and contains a discussion of necessary and sufficient conditions so that this be possible.

* C. d'ASPREMONT : CORE, Université Catholique de Louvain; J. CREMER : Virginia Polytechnic Institute and State University et GREMAQ, Université de Toulouse I; L. A. GÉRARD-VARET : GREQE, École des Hautes Études en Sciences Sociales, Marseille.
Nous remercions Pierre PICARD pour ses commentaires.

1 Introduction

Cet article présente une introduction à la littérature récente sur les mécanismes bayésiens incitatifs. A la fin des années 1970, ARROW [1979] et d'ASPREMONT et GÉRARD-VARET [1975, 1979, 1982] ont posé la question suivante. Soit n agents, neutres au risque ; dans quelles circonstances peut-on trouver un mécanisme bayésien qui leur permette de prendre une décision collective efficace ? Des réponses partielles furent apportées. En particulier il fut prouvé que si un agent avait des croyances libres, c'est-à-dire que son type ne lui apprenait rien sur les types des autres, il était possible de trouver de tels mécanismes.

Au cours des toutes dernières années, de nouveaux résultats ont été prouvés pour ce problème, dans le cas où chaque agent a un nombre discret de types. Le but de cet article est de présenter des résultats de façon informelle et de proposer un guide à cette littérature. La conclusion explorera quelques questions encore ouvertes.

Le lecteur remarquera que l'approche présentée ici donne un éclairage nouveau à la littérature sur l'existence de mécanismes bayésiens efficaces. Celle-ci s'efforce en effet de présenter des résultats d'existence. Elle montre, en général de façon constructive, que sous telles ou telles conditions des mécanismes bayésiens efficaces existent. Comme ces preuves sont assez difficiles et requièrent des moyens sophistiqués, il en ressort une impression que l'existence est un phénomène assez rare. Or, avant les toutes dernières années, il n'y avait pas d'exemples d'environnements où un mécanisme bayésien efficace n'existait pas. La recherche exposée ici est partie pour l'essentiel de la question : « quand n'y a-t-il pas de mécanismes bayésiens efficaces ? ». La réponse est assez surprenante.

Les résultats nouveaux présentés ici sont dus à JOHNSON, PRATT et ZECKHAUSER [1990] et d'ASPREMONT, CRÉMER et GÉRARD-VARET [1990 *a*, 1990 *b*].

2 Le cadre d'étude

Nous reprenons le modèle standard dans lequel s'est développée une grande partie de la théorie des incitations. Nous considérons une économie composée de n agents, $n \geqslant 2$, où les agents sont indexés par les entiers compris entre 1 et n. La fonction d'utilité de l'agent i s'écrit :

$$u_i(x, \alpha_i) + t_i,$$

où

- $t_i \in \mathrm{R}$ est un transfert monétaire reçu par l'agent.

• α_i est le type de l'agent. Ce type représente l'information privée de l'agent. On suppose que α_i appartient à un ensemble fini A_i.

• x est une décision publique prise par les agents dans un ensemble X. Nous ne ferons aucune hypothèse restrictive sur l'ensemble X, ce qui permet des interprétations diverses. La littérature a souvent interprété x comme la quantité d'un bien public. D'autres auteurs ont interprété x comme un vecteur de transactions entre entreprises et les u_i comme des fonctions de profits. Ils ont ainsi pu appliquer les résultats de la théorie des mécanismes bayésiens à la théorie des contrats (*voir* RIORDAN [1984], CRÉMER et RIORDAN [1985, 1987]).

Nous appellerons structure d'utilités un n-tuple de fonctions d'utilité. Pour simplifier l'exposé nous supposerons que le choix de $x \in X$ est organisé par un planificateur. En fait, si l'on retient la deuxième interprétation de X discutée ci-dessus le rôle de planificateur serait tenu par un contrat signé par les entreprises avant que leurs types ne leur soient révélés. Le planificateur veut mettre en place une règle de choix public $s : A \rightarrow X$, où A est l'ensemble $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ des états de la nature. C'est-à-dire que le planificateur veut prendre une décision publique en fonction des types des agents. La difficulté de la tâche réside bien sûr dans le fait que le planificateur ne connaît pas ces types. Il doit donc obtenir des agents qu'ils révèlent leur information privée et se servir de cette information révélée pour prendre la décision $s(\alpha)$, où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$.

Nous dirons que la règle de décision publique s est efficace, et nous l'écrirons s^*, si elle satisfait l'inégalité

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i(s^*(\alpha)\,;\,\alpha_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} u_i(x\,;\,\alpha_i) \qquad \forall x \in X.$$

Pour conclure la présentation du modèle, il ne nous reste qu'à décrire les croyances des agents. Quand il est de type α_i, l'agent i attache une probabilité $P(\alpha_{-i} | \alpha_i)$ à ce que les autres agents soient de types α_{-i} où α_{-i} est un élément de $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$, c'est-à-dire une collection de $(n-1)$ types, un pour chaque agent sauf i. [1] Dans ce qui suit nous supposerons que les probabilités $P(\,.\,|\alpha_i)$ sont consistantes, en ce sens qu'elles sont obtenues par conditionalisation à partir d'une distribution $P(\alpha)$ sur A. De façon plus précise nous supposons que pour tout i et tout $\alpha_i \in A_i$, la probabilité

$$P(\alpha_i) = \sum_{\alpha_{-i} \in A_{-i}} P(\alpha_{-i}, \alpha_i)$$

est strictement positive et que $P(\alpha_{-i} | \alpha_i)$ est égal à $P(\alpha_{-i}, \alpha_i)/P(\alpha_i)$. La probabilité P est connue du planificateur. Nous appellerons le triplet (N, A, P) une structure d'information. La combinaison d'une structure d'information et d'une structure d'utilités forme un problème d'incitations bayésiennes.

1. Comme il n'y a pas de risque de confusion, nous allégeons la notation en utilisant le même symbole P pour des probabilités sur différents ensembles.

3 Des mécanismes qui ne dépendent pas des croyances

Supposons, dans un premier temps, que le planificateur désire utiliser seulement l'information qu'il possède sur les fonctions u_i et refuse de s'appuyer sur l'information sur les croyances. Il doit employer un mécanisme qui incite les agents à dire la vérité quelles que soient les annonces des autres agents. Le planificateur, ayant obtenu que les agents annoncent leurs types, prendra la décision $s^*(a)$ (pour l'instant nous concentrons notre attention sur des décisions efficaces) et effectuera des transferts $t_i^u(\alpha)$ vers les agents.

Si l'agent i annonce qu'il est de type $\tilde{\alpha}_i$ alors qu'il est réellement de type α_i et que les autres agents ont annoncé qu'ils étaient de types α_{-i} son utilité sera

$$u_i(s^*(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_i) + t_i^u(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i).$$

L'agent i annoncera son vrai type si nous avons

$$(2) \quad \begin{cases} u_i(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_i) + t_i^u(\alpha_{-i}, \alpha_i) \geqslant u_i(s^*(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_i) + t_i^u(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i) \\ \forall\, \alpha_{-i} \in A_{-i}, \alpha_i \in A_i, \tilde{\alpha}_i \in A_i. \end{cases}$$

A la suite de GROVES [1973] les fonctions t_i^u qui permettent à ces inégalités de tenir (et d'assurer qu'annoncer son vrai type est une « stratégie dominante ») ont été étudiées par de nombreux auteurs ; citons en particulier GREEN et LAFFONT [1979]. En particulier, Groves a montré que l'inégalité (2) tenait si l'on prenait

$$t_i^u(\alpha) = t_i^g(\alpha) = \sum_{j \neq i} u_j(s^*(\alpha); \alpha_j)$$

c'est-à-dire si le transfert vers l'agent i était égal à la valeur des externalités qu'il impose aux autres agents. En effet, dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} u_i(s^*(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_i) + t_i^g(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i) &= \sum_{j=1}^{n} u_j(s^*(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_j) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} u_j(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_j) \text{ (puisque } s^* \text{ est efficace)} \\ &= u_i(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_i) + \sum_{j \neq 1}^{n} u_j(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_j) \\ &= u_i(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_i) + t_i^g(\alpha_{-i}, \alpha_i). \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que toute fonction de transfert de la forme

$$(3) \qquad t_i^u(\alpha) = t_i^g(\alpha) + h_i(\alpha_{-i})$$

où les h_i sont des fonctions de A_{-i} dans $\mathbb{R}$ satisfont les inégalités (2). De fait, GREEN et LAFFONT [1977] et HOLMSTROM [1979] ont montré que seules les fonctions satisfaisant (3) donnent les incitations adéquates quand les ensembles A_i sont des sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}^p$.

Très rapidement la littérature se posa la question de savoir si les fonctions t_i^u pouvaient être choisies de façon à respecter d'autres contraintes que (2). En particulier, WALKER [1979] et GREEN et LAFFONT [1979] montrèrent qu'il n'est pas possible en général de trouver des fonctions de transferts qui équilibrent le budget, c'est-à-dire satisfaisant à la fois

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i^u(\alpha)=0 \qquad \forall \alpha \in \mathrm{A},$$

et les inégalités (1) et (2). La démonstration est relativement simple, il suffit de montrer que tout t_i^u qui satisfait (3) ne peut pas satisfaire (4), sauf dans certains cas très particuliers.

Dans d'ASPREMONT *et al.* [1990 *a*], nous montrons que si chaque agent a deux types possibles, c'est-à-dire si $|\mathrm{A}_i|=2$ pour tout i, alors il est possible de trouver des fonctions de transferts satisfaisant (1), (2) et (4), mais ne satisfaisant pas (3). Un exemple, repris de d'ASPREMONT *et al.* [1990 *a*], peut être utile. Supposons que pour $i=1, 2$, A_i est égal à $\{0, 1\}$ et que X comprenne aussi deux éléments 0 et 1. Les fonctions d'utilités sont de la forme :

(i) $u_i(0\,;\alpha_i)=0\ \forall i,\ \forall \alpha_i$

(ii) $u_1(1\,;\alpha_1)+u_2(1\,;\alpha_2)>0$ si et seulement si $\alpha_1=1$ et $\alpha_2=1$

(iii) $u_1(1\,;1)>u_1(1\,;0)>0>u_2(1\,;1)>u_2(1\,;0)$.

Dans ce cas

$$s^*(\alpha_1, \alpha_2)=1 \text{ si et seulement si } (\alpha_1, \alpha_2)=(1, 1).$$

Si l'on prend, pour un τ quelconque :

$$t_1^u(0, 1)=t_1^u(0, 0)=t_1^u(1, 0)=\tau$$
$$t_2^u(0, 1)=t_2^u(0, 0)=t_2^u(1, 0)=-\tau$$
$$\tau+u_2(1\,;0)\leqslant t_1^u(1, 1)\leqslant \tau+u_2(1\,;1)$$
$$t_2^u(0, 1)=-t_1^u(1, 1)$$

les quatre contraintes d'incitations sont satisfaites. Mais il est facile de montrer que ces t_i^u ne forment pas des mécanismes de GROVES. Pour ceci, on devrait avoir, pour tout α

$$t_1^u(\alpha_1, \alpha_2)=u_2(s(\alpha_1, \alpha_2)\,;\alpha_2)+f_1(\alpha_2)$$
$$=-t_2^u(\alpha_1, \alpha_2)=-u_1(s(\alpha_1, \alpha_2)\,;\alpha_1)-f_2(\alpha_1).$$

Donc

$$f_1(\alpha_2)+f_2(\alpha_1)=-u_2(s(\alpha_1, \alpha_2)\,;\alpha_2)-u_1(s(\alpha_1, \alpha_2)\,;\alpha_1).$$

On aurait

$$f_1(1)+f_2(1)<0,$$

mais aussi

$$f_1(0)+f_2(1)=f_1(1)+f_2(0)=f_1(0)+f_2(0)=0$$

ce qui entraînerait

$$f_2(1)+f_1(1)=0,$$

d'où une contradiction.

Il y a deux leçons principales à retirer de l'existence de mécanismes satisfaisant (1), (2) et (4) quand $|A_i|=2$. D'abord une leçon pratique : il existe un certain nombre de problèmes où il est légitime de supposer que chaque agent n'a que deux types possibles. Dans ce cas, l'asymétrie d'information ne crée pas d'obstacle à des prises de décision efficaces en ce qui concerne les biens publics. Mais ces résultats servent aussi de mise en garde. De nombreux articles supposent « pour simplifier » que les agents n'ont que deux types possibles. Cette « simplification » peut modifier profondément les résultats.

4 Utiliser la structure d'information

Imaginons un planificateur disposant de deux bureaux. Il a fourni « au bureau des utilités » des informations sur les fonctions d'utilité des agents. Le bureau des utilités a pu ainsi construire un mécanisme de Groves, qui assure la révélation des préférences des agents. Mais il annonce un déficit $R(\alpha)$:

$$R(\alpha)=-\sum_{i=1}^{n} t_i^u(\alpha),$$

qui peut être négatif.

Les données relatives au déficit sont communiquées au « bureau des croyances » pour y remédier. De façon plus précise, on demande au bureau des croyances de trouver des transferts $t_i^c(\alpha)$ qui satisfont les contraintes suivantes :

$$(5a)\qquad \sum_{i=1}^{n} t_i^c(\alpha)=R(\alpha)\qquad \forall\alpha\in A$$

$$(5b)\qquad \sum_{\alpha_{-i}} P(\alpha_{-i}|\alpha_i)\, t_i^c(\alpha_{-i},\alpha_i)\geqslant \sum_{\alpha_{-i}} P(\alpha_{-i}|\alpha_i)\, t_i^c(\alpha_{-i},\tilde{\alpha}_i)$$
$$\forall i\in N,\ \alpha_i\in A_i,\ \tilde{\alpha}_i\in A_i.$$

Les égalités $(5a)$ expriment le fait que les transferts t_i^c couvrent le déficit budgétaire. Les inégalités $(5b)$ expriment le fait que si l'on mettait en place la politique de transferts t_i^c, les agents auraient intérêt à annoncer leurs vraies préférences, indépendamment de toute décision publique. Un lecteur normalement sceptique pensera que l'on ne peut trouver de tels t_i^c que très exceptionnellement. Nous lèverons ses doutes un peu plus loin.

Appelons t_i les transferts obtenus en aggrégeant t_i^u et t_i^c :

$$(6) \qquad t_i(\alpha) = t_i^c(\alpha) + t_i^u(\alpha), \qquad \forall \alpha.$$

De toute évidence :

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} t_i^c(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} t_i^u(\alpha) = -\mathrm{R}(\alpha) + \mathrm{R}(\alpha) = 0, \qquad \forall \alpha.$$

Les transferts $t_i(\alpha)$ équilibrent donc le budget. D'autre part, à partir de (2) nous obtenons

$$(8) \qquad \sum_{\alpha_{-i}} \mathrm{P}(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)[u_i(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_i) + t_i^u(\alpha_{-i}, \alpha_i)]$$
$$\leqslant \sum_{\alpha_{-i}} \mathrm{P}(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)[u_i(s^*(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_i) + t_i^u(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i)]$$
$$\forall i \in \mathrm{N}, \ \alpha_i \in \mathrm{A}_i, \ \tilde{\alpha}_i \in \mathrm{A}_i.$$

Additionnant (8) et (5 *b*), nous avons donc :

$$(9) \qquad \sum_{\alpha_{-i}} \mathrm{P}(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)[u_i(s^*(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_i) + t_i(\alpha_{-i}, \alpha_i)]$$
$$\leqslant \sum_{\alpha_{-i}} \mathrm{P}(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)[u_i(s^*(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_i) + t_i(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i)]$$
$$\forall i \in \mathrm{N}, \ \alpha_i \in \mathrm{A}_i, \ \tilde{\alpha}_i \in \mathrm{A}_i.$$

En utilisant les transferts $t_i(\alpha)$ et en prenant les décisions $s^*(\alpha)$, le planificateur incite donc les agents à révéler leurs types de façon véridique. En terme technique, la littérature appelle un objet de la forme $(s^*(.), \{t_i(.)\}_{i \in \mathrm{N}})$, satisfaisant (1), (2) et (4), un mécanisme bayésien efficace.

Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1 : La structure d'information (N, A, P) satisfait la condition C si pour toute fonction $\mathrm{R} : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, il existe des t_i^c satisfaisant (5 *a*) et (5 *b*).

Nous venons de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1 : Si une structure d'information satisfait la condition C, il existe un mécanisme bayésien efficace quelle que soit la structure d'utilités.

Un certain nombre de nos lecteurs se rappelleront une autre condition C, introduite dans d'ASPREMONT et GÉRARD-VARET [1979, 1982] qui s'écrit : « le système d'équations

$$(10\,a) \qquad \lambda_i(\alpha_i, \tilde{\alpha}_i) \geqslant 0 \qquad \forall i, \quad \forall \alpha_i \in \mathrm{A}_i, \quad \tilde{\alpha}_i \in \mathrm{A}_i, \quad \alpha_i \neq \tilde{\alpha}_i$$

$$(10\,b)\qquad P(\alpha_{-i}\,|\,\alpha_i)\sum_{\tilde{\alpha}_i\neq\alpha_i}\lambda_i(\tilde{\alpha}_i,\alpha_i) - \sum_{\tilde{\alpha}_i\neq\alpha_i}P(\alpha_{-i}\,|\,\tilde{\alpha}_i)\,\lambda_i(\alpha_i,\tilde{\alpha}_i)=\mu(\alpha)\qquad\forall i,\qquad\forall\alpha\in A$$

$$(10\,c)\qquad \mu(\alpha)\neq 0 \text{ pour au moins un } \alpha\in A$$

n'a pas de solution ». [2]

La théorie de la dualité dans les systèmes d'égalités et inégalités linéaires permet de prouver que ces deux formulations sont équivalentes (d'ASPREMONT *et al.* [1990 *b*]).

Vue sous la forme « primale » sous laquelle nous l'avons introduite, la condition C peut paraître très restrictive. Les premiers résultats positifs (d'ASPREMONT et GÉRARD-VARET [1979], [1982]) sur l'existence des mécanismes bayésiens efficaces furent obtenus en montrant qu'elle tenait si un des agents avait des croyances libres, c'est-à-dire, s'il existait un $i\in N$ tel que $P(\alpha_{-i}\,|\,\alpha_i)$ soit indépendant de α_i. En particulier, il existe des mécanismes bayésiens efficaces balancés quand les types des agents sont indépendants :

$$P(\alpha)=P(\alpha_1)\,P(\alpha_2)\ldots P(\alpha_n)\qquad\forall\alpha.$$

Quoique abondamment utilisées dans la littérature les croyances indépendantes sont un cas très particulier, et l'on peut poser la question de l'existence des mécanismes quand cette hypothèse ne tient pas. Pour ce faire il faut distinguer les structures d'information où il y a deux agents et celles où il y a plus de deux agents.

Quand il y a deux agents et que les croyances sont consistantes, la condition C ne tient que si les types sont indépendants (voir d'ASPREMONT et GÉRARD-VARET [1982]). Comme la condition C n'est que suffisante pour l'existence de mécanismes bayésiens efficaces, on peut se poser la question de savoir s'il existe effectivement des structures d'information où l'existence de tels mécanismes ne peut pas être obtenue. Nous apportons une réponse à cette question dans d'ASPREMONT *et al.* [1990] : nous construisons une structure d'information où chacun des deux agents a 6 types, choisissons une fonction d'utilité, et montrons que pour cette structure d'information et pour tout autre problème obtenu en modifiant légèrement les probabilités, il n'existe pas de mécanismes bayésiens efficaces. La restriction à 6 types n'est pas essentielle, quoique le nombre minimum de types nécessaire pour que la technique de construction de contre-exemple que nous avons employée fonctionne n'ait pas été déterminé.

---

2. L'égalité (10 *b*) spécifie que pour α donné la quantité

$$P(\alpha_{-i}\,|\,\alpha_i)\sum_{\tilde{\alpha}_i\neq\alpha_i}\lambda_i(\tilde{\alpha}_i,\alpha_i)-\sum_{\tilde{\alpha}_i\neq\alpha_i}P(\alpha_{-i}\,|\,\tilde{\alpha}_i)\,\lambda_i(\alpha_i,\tilde{\alpha}_i)=\mu(\alpha)$$

est indépendante de *i*.

Autant que nous le sachions, la construction ci-dessus a produit les premiers exemples de non-existence de mécanismes bayésiens. Il faut cependant se méfier d'une généralisation trop hâtive aux cas où il y a au moins trois agents. [3] En effet, la procédure de construction rappelle celle par laquelle MASKIN [1980] a montré dans un résultat classique que l'on peut de façon très générale mettre en oeuvre n'importe quelle règle de décision sociale dans le cadre de l'implémentation en équilibre de Nash. Cette technique de construction de contre-exemples, que nous employions, ne fonctionne pas dans ce cas. En fait, on peut trouver un théorème d'existence très fort (d'ASPREMONT *et al.* [1990 *a*]) :

THÉORÈME 2 : Si $n>2$, la condition C tient de façon générique, et donc de façon générique les structures d'information satisfont la propriété suivante : quelles que soient les fonctions d'utilité il existe un mécanisme bayésien efficace.

Pour comprendre le rôle du nombre d'agents, il est nécessaire de comprendre la technique par laquelle nous construisons, dans le cas $n=2$, des problèmes sans solution. Nous partons d'un ensemble X et de deux fonctions d'utilité pour lesquelles il n'existe pas de mécanismes efficaces en stratégies dominantes. Ceci signifie que l'on ne peut pas trouver de mécanisme efficace tel que, connaissant le type de l'autre agent, un agent ait toujours intérêt à révéler son vrai type. Une traduction bayésienne du fait que l'agent i de type α_i sait que l'agent j est de type α_j s'écrit :

$$P(\alpha_j \mid \alpha_i)=1,$$
$$P(\alpha'_j \mid \alpha_i)=0 \qquad \text{pour} \quad \alpha'_j \neq \alpha_j.$$

Soit donc A_i l'ensemble des types de l'agent i dans le problème non bayésien. Nous construisons un mécanisme bayésien où A'_i, l'ensemble des types de l'agent i, est $A_i \times A_j$. Un élément (α_i, α_j) de A'_i s'interprète comme suit : la fonction d'utilité de l'agent i est $u_i(.\,;\alpha_i)$ et il « sait » que la fonction d'utilité de l'agent j est $u_j(.\,;\alpha_j)$. Il est possible de montrer alors qu'il n'existe pas de mécanisme bayésien efficace pour ces problèmes et que cette non existence est préservée par une petite perturbation du problème.

Il faut cependant remarquer que le mécanisme bayésien construit n'est pas totalement équivalent à un mécanisme en stratégies dominantes. En effet, nous demandons à chaque agent des informations non seulement sur sa propre fonction d'utilité, mais aussi sur celle de l'autre agent. Dans le cas $n=2$, ceci n'apporte aucun avantage. Dans le cas $n=3$, au contraire on peut identifier un agent qui dévierait d'un équilibre de révélation car son annonce serait différente de celle des autres agents. [4] Ceci correspond dans la littérature au concept d'implémentation par l'équilibre de Nash, introduit par MASKIN [1977].

---

3. Steve Matthews et Mike Whinston furent les premiers à nous le faire remarquer.
4. Dans le cas $n=2$, quand les annonces des deux agents sont différentes, on ne sait pas lequel a « menti ».

Pour conclure cette section, nous présentons graphiquement deux exemples non triviaux de structure d'information où la condition C ne tient pas (*voir* figure 1 et 2). Nous ne savons pas si la symétrie évidente de ces structures d'information est d'une façon ou d'une autre nécessaire pour que C ne tienne pas.

FIGURE 1

Structure d'information où C ne tient pas.

	Probabilités				Les $\mu(\alpha)$		
	$\alpha_2=1$	$\alpha_2=2$	$\alpha_2=3$		$\alpha_2=1$	$\alpha_2=2$	$\alpha_2=3$
$\alpha_1=1$	3/54	1/54	2/54		9/54	−9/54	0
$\alpha_1=2$	2/54	3/54	1/54	$\alpha_3=1$	0	9/54	9/54
$\alpha_1=3$	1/54	2/54	3/54		−9/54	0	9/54
	1/54	2/54	3/54		−9/54	0	9/54
	3/54	1/54	2/54	$\alpha_3=2$	9/54	−9/54	0
	2/54	3/54	1/54		0	9/54	−9/54
	2/54	3/54	1/54		−0	9/54	−9/54
	1/54	2/54	3/54	$\alpha_3=3$	−9/54	0	9/54
	3/54	1/54	2/54		9/54	−9/54	0

On a, par exemple $P(\alpha)=3/54$ si $\alpha_1=3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=2$, et $P(\alpha)=1/54$ si $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=3$. Tous les λ_i sont égaux à 1. Les $\mu(\alpha)$ sont indiqués à droite.

FIGURE 2

Un exemple « moins symétrique ».

4/54	.5/54	1.5/54	6/18	−4.5/18	−1.5/18
1.5/54	4/54	.5/54	−1.5/18	6/18	−4.5/18
.5/54	1.5/54	4/54	4.5/18	−1.5/18	6/18
.5/54	1.5/54	4/54	−4.5/18	−1.5/18	6/18
4/54	.5/54	1.5/54	6/18	−4.5/18	1.5/18
1.5/54	4/54	.5/54	−1.5/18	6/18	−4.5/18
1.5/54	4/54	.5/54	−1.5/18	6/18	4.5/18
.5/54	1.5/54	4/54	−4.5/18	−1.5/18	6/18
4/54	.5/54	1.5/54	6/18	−4.5/18	−1.5/18

On a $P(\alpha)=.5/54$ pour $\alpha=(3, 3, 2)$.

5 Renforcer C

La condition C exprime le fait que l'on peut combler le déficit en donnant des incitations aux agents à révéler leurs vrais types. Mais ces incitations sont lâches : un agent peut être indifférent entre annoncer son vrai type et mentir. La condition B exprime le fait que les incitations de l'agent doivent être strictes :

Condition B : La structure d'information (N, A, P) satisfait la condition B si pour toute fonction $R : A \to \mathbb{R}$, il existe des transferts t_i^B satisfaisant

$$(11\,a) \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i^B(\alpha) = R(\alpha) \qquad \forall \alpha \in A$$

$$(11\,b) \qquad \sum_{\alpha_{-i}} P(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)\, t_i^B(\alpha_{-i}, \alpha_i) > \sum_{\alpha_{-i}} P(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)\, t_i^B(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i)$$

$$\forall i, \alpha_i, \alpha_i.$$

Il est facile de montrer le lemme suivant :

Lemme 3 : La condition B tient si et seulement si les équations (11 *a*) et (11 *b*) tiennent avec $R(\alpha)$ identiquement égal à 0.

Il est possible de montrer que la condition B ainsi exprimée est équivalente à la condition B de d'Aspremont et Gérard-Varet [1982] qui s'exprime : « Toute solution du système d'équation (10 *a*) et (10 *b*) satisfait $\lambda_i(\alpha_i, \tilde{\alpha}_i) = 0$ pour tout $i \in N$, $\alpha_i \in A_i$, $\tilde{\alpha}_i \in A_i$, $\alpha_i \neq \tilde{\alpha}_i$ ».

Ce petit changement dans la condition C nous permet de renforcer considérablement les conclusions du théorème 1 (voir d'Aspremont *et al.* [1990 *b*] et Johnson *et al.* [1990]).

Théorème 4 : La structure d'information (N, A, P) satisfait la condition B si et seulement si pour tout X, toute famille de fonctions d'utilités $\{u_i(.,.)\}_{i \in N}$, et toute règle de décision publique s, il est possible de trouver des transferts t_i tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in A$$

$$\sum_{\alpha_{-i}} P(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)\,[u_i(s(\alpha_{-i}, \alpha_i); \alpha_i) + t_i(\alpha_{-i}, \alpha_i)]$$

$$> \sum_{\alpha_{-i}} P(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)\,[u_i(s(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i); \alpha_i) + t_i(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i)]$$

$$\forall i \in N, \alpha_i \in A_i, \tilde{\alpha}_i \in A_i.$$

La condition B est donc nécessaire et suffisante pour que l'on puisse mettre en oeuvre toute règle de décision publique, même celles qui ne sont pas efficaces.

Il est facile de voir pourquoi cette condition est suffisante pour que la propriété tienne. L'inégalité (11 *b*) exprime le fait que l'on peut donner aux agents, uniquement avec des transferts, des incitations strictes à dire la vérité. En multipliant les t_i^B correspondant à $R(\alpha)=0$ par une constante strictement positive assez grande on peut donner des incitations, mesurées en francs, aussi grandes que l'on veut aux agents. En particulier, ces incitations peuvent être assez grandes pour dominer toute incitation à camoufler le vrai type qui proviendrait du désir de modifier la décision publique. La preuve de la nécessité de B n'est pas beaucoup plus difficile.

Contrairement à la condition C, la condition B ne tient pas si les types sont indépendants. En effet, dans ce cas $P(\alpha_{-i} \mid \alpha_i)$ ne dépend pas de α_i et peut donc s'écrire $P_i(\alpha_{-i})$. L'équation (11 *b*) se réécrit :

$$\sum_{\alpha_{-i}} P_i(\alpha_{-i})\, t_i^B(\alpha_{-i}, \alpha_i) > \sum_{\alpha_{-i}} P_i(\alpha_{-i})\, t_i^B(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i).$$

Mais en échangeant les rôles de α_i et $\tilde{\alpha}_i$ on obtient :

$$\sum_{\alpha_{-i}} P_i(\alpha_{-i})\, t_i^B(\alpha_{-i}, \tilde{\alpha}_i) > \sum_{\alpha_{-i}} P_i(\alpha_{-i}, \alpha_i)\, t_i^B(\alpha_{-i}, \alpha_i).$$

Ces deux inégalités sont, bien entendu, incompatibles.

6 Relations entre condition C et condition B

Dans d'Aspremont *et al.* [1991], nous prouvons que la seule différence entre les structures d'information qui satisfont la condition B et celles qui satisfont la condition C est la diversité des croyances générées par les différents types. De façon plus précise, on peut prouver le théorème suivant.

Théorème 5 : Une structure d'information (N, A, P) satisfait la condition B si et seulement si elle satisfait la condition C et si pour tout $i \in N$, tout α_i et $\tilde{\alpha}_i$ dans A_i satisfaisant $\alpha_i \neq \tilde{\alpha}_i$, on peut trouver α_{-i} tel que :

$$P(\alpha_{-i} \mid \alpha_i) \neq P(\alpha_{-i} \mid \tilde{\alpha}_i)$$

La preuve de ce théorème est relativement facile, une fois connue l'interprétation primale de la condition C. Elle repose sur la remarque de Johnson *et al.* [1990] que l'on peut appliquer la théorie des « scoring rules » aux problèmes de révélation.

Le Théorème 5 permet de prouver le corollaire suivant :

Corollaire 6 : Si $n=2$, alors la structure d'information (N, A, P) ne satisfait pas B.

En effet, d'ASPREMONT et GÉRARD-VARET [1982] montrent que si $n=2$, la structure (N, A, P) ne satisfait C que si les types sont indépendants.

Le théorème 5 nous permet aussi de montrer que la condition B tient génériquement si $n \geqslant 3$. En effet dans ce cas l'ensemble des structures d'information qui satisfait B contient un ensemble ouvert et dense car il est l'intersection de deux ensembles ouverts et denses :

– un ensemble ouvert et dense contenu dans l'ensemble des structures d'information qui satisfait C ;

– l'ensemble de structures d'information qui quels que soient α_i et $\tilde{\alpha}_i$ satisfont $P(\alpha - i \mid \alpha_i) \neq P(\alpha - i \mid \tilde{\alpha}_i)$ pour au moins un α_{-i}.

Il est aussi possible de montrer une espèce de réciproque du théorème 4, que nous n'écrirons pas formellement car elle est assez lourde : une structure d'information satisfait C si et seulement si elle est peut-être obtenue à partir d'une structure d'information qui satisfait B en faisant éclater certains types en types indépendants.

7 Conclusion

Comme nous l'avions remarqué dans l'introduction, il existe d'autres avenues pour explorer les mécanismes bayésiens. En particulier, on peut imposer des restrictions jointes sur les utilités et les croyances. Par exemple, on peut supposer comme le font BENSAID [1986] et LAFFONT et MASKIN [1980] que les utilités dépendent d'un paramètre qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0, 1] et imposer des conditions sur les variations des utilités marginales quand ce paramètre varie.

Il est aussi important de noter que le cadre que nous employons est le cadre le plus simple que nous puissions imaginer pour traiter des problèmes de sélection adverse avec plusieurs agents. En particulier, nous n'étudions pas les problèmes posés par :

– l'aversion pour le risque,

– la présence de contraintes de participation,

– la collusion entre les agents.

Ces simplifications nous permettent d'étudier en détail les techniques que le planificateur peut employer pour vérifier l'information fournie par un agent grâce à la présence d'autres agents. Il est frappant de constater que même le problème très simple que nous étudions n'ait pas été parfaitement élucidé dans la littérature.

D'autre part nous voudrions attirer l'attention du lecteur sur un certain nombre de questions ouvertes :

a) si $|A_i| > 2$ pour tout i, la condition C est-elle nécessaire pour que l'on puisse garantir l'existence de mécanismes efficaces ?

b) si $n=3$, peut-on trouver des contre-exemples à l'existence de mécanismes bayésiens efficaces ?

• Références bibliographiques

Arrow, K. J. (1979). — « The Property Rights Doctrine and Demand Revelation under Incomplete Information », in *Economics and Public Welfare* (M. Boskin, ed.), Academic Press, New York.

Bensaid, B. (1986). — « Bayesian Incentive Compatible Mechanisms under a Negative Dependence Assumption », Document de travail, Université Paris-I.

Crémer, J. et Riordan, M. (1987). — « On Governing Multilateral Transactions with Bilateral Contracts », *Rand Journal of Economics*, 18, pp. 436-451.

Crémer, J. et Riordan, M. (1979). — « A Sequential Solution to the Public Goods Problem », *Econometrica*, 53, pp. 77-84.

d'Aspremont, C. et Gérard-Varet, L. A. (1975). — « Incentive Games with Incomplete Information: an Application to a Public Input Model », *Colloque sur la Théorie des Jeux*, Institut des Hautes Etudes de Belgique, *p*. 167-172.

d'Aspremont, C. et Gérard-Varet, L. A. (1979). — « Incentives and Incomplete Information », *Journal of Public Economics*, 11, pp. 25-45.

d'Aspremont, C. et Gérard-Varet, L. A. (1982). — « Bayesian Incentive Compatible Beliefs », *Journal of Mathematical Economics*, 10, pp. 83-103.

d'Aspremont, C., Crémer, J. et Gérard-Varet, L. A. (1990 *a*). — « Incentives and the Existence of Pareto-optimal Revelation Mechanisms », *Journal of Economic Theory*, 52, pp. 233-254.

d'Aspremont, C. Crémer, J. et Gérard-Varet, L. A. (1990 *b*). — « Bayesian Implementation of non Pareto-optimal Social Choice Functions », *Mimeo*, présenté au Congrès Mondial de la Société d'Econométrie.

Green, J. et Laffont, J. J. (1977). — « Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods », *Econometrica*, 45, pp. 427-428.

Green, J. et Laffont, J. J. (1979). — *Incentives in Public Decision Making*, North Holland, Amsterdam.

Groves, T. (1973). — « Incentives in Teams », *Econometrica*, 41, pp. 617-631.

Holmström, B. (1979). — « Groves Schemes on Restricted Domains », *Econometrica*, 47, pp. 1137-1144.

Johnson, S., Pratt J. et Zeckhauser J. (1990). — « Efficiency despite Mutually Payoff-relevant Private Information: the Finite Case », *Econometrica*, 58, pp. 873-900.

Laffont, J. J. and Maskin, E. (1979). — « A Differential Approach to Expected Utility Maximizing Mechanisms » in *Aggregation and Revelation of Preferences* (J. J. Laffont, ed.) North Holland, Amsterdam.

Maskin, E. (1977). — « Nash Equilibrium and Welfare Optimality », *Mimeo*.

Riordan, M. (1984). — « Uncertainty, Asymmetric Information and Bilateral Contracts », *Review of Economic Studies*, 51, pp. 83-94.

Walker, M. (1980). — « On the Inexistence of a Dominant Strategy Mechanism for Making Optimal Public Decisions », *Econometrica*, 48, pp. 1521-1540.