# Microéconomie de l'hydroélectricité

# Partie 2. La gestion des barrages

**Claude Crampes* et Michel Moreaux**ℵ

**avril 2016**

* claude.crampes@tse-fr.eu
ℵ michel.moreaux@tse-fr.eu

## Table des matières

## Introduction

Pour gagner en réalisme dans l'analyse et incorporer au modèle les contraintes physiques et temporelles auxquelles font face les gestionnaires de barrages, il faut accroitre la complexité de notre cadre analytique tout en évitant de le rendre incompréhensible par sa lourdeur. Pour ce faire, nous allons adopter une modélisation continue de la variable temps qui permet d'obtenir les mêmes résultats que la modélisation en temps discret, mais de façon suffisamment souple pour être complétée par divers aspects techniques, économiques et réglementaires, caractéristiques des ressources hydroélectriques. De fait, l'électricité n'étant pas stockable, il faut répondre à la demande à chaque instant et il est donc pertinent d'adopter une modélisation dans laquelle le temps est une variable continue.

Dans cette partie, nous allons construire progressivement la politique optimale de prélèvement dans un stock d'eau, d'abord de taille fixée, puis modifié par des apports et pertes incontrôlées, et dont la valeur résiduelle peut être endogène ou exogène, par exemple en raison d'obligations contenues dans un cahier des charges. Nous mettons l'accent sur la règle d'arbitrage qui doit sous-tendre la gestion d'un stock dont on peut anticiper ou retarder les usages. La valeur du taux d'escompte et l'évolution temporelle de la fonction de valorisation des prélèvements sont des ingrédients essentiels de cet arbitrage.

Dans le chapitre 1, nous déterminons le sentier optimal des prélèvements dans un stock de taille donnée et étudions la sensibilité de ce sentier à des variations de divers paramètres tels que la taille initiale et des variations exogènes du stock disponible, ainsi que du stock à conserver en fin d'exercice. Nous analysons aussi comment la politique optimale change selon que la demande augmente, diminue ou reste stationnaire avec l'écoulement du temps

Le chapitre 2 introduit une série d'éléments plus spécifiques à l'hydroélectricité, notamment la recharge du réservoir par les précipitations, les contraintes pesant sur les flux (par exemple les capacités de turbinage) et les stocks (réserve pour maintenir l'étiage). Nous y abordons aussi le problème de la gestion conjointe de plusieurs réservoirs qui ont leurs caractéristiques techniques propres et sont parfois dépendants les uns des autres quand ils sont disposés le long d’une même vallée.

## Chapitre 1. Utilisation optimale d'un stock d'eau

Dans ce chapitre, nous déterminons les caractéristiques du sentier optimal des prélèvements dans un stock d'eau initialement disponible et ne bénéficiant d'aucun apport ultérieur. Après avoir précisé les hypothèses et les notations retenues pour la modélisation (section 1), nous considérons d'abord le cas d'une utilisation optimale de ce stock au cours d'une période de durée finie en supposant donnée la part du stock qu'il faut garder en réserve à l'issue de ladite période, lorsque l'objectif est la maximisation de la somme des surplus actualisés réalisables au cours de la période en question (section 2). Nous montrons ensuite comment une valorisation exogène du stock à préserver permet de préciser la valeur du stock initial et nous établissons la méthode à suivre pour endogénéiser cette valorisation (section 3). Enfin, nous tenons compte du fait que le stock peut subir une déperdition naturelle, notamment par évaporation, déperdition qui affecte le profil temporel des prélèvements à effectuer (section 4) et nous concluons (section 5).

### 1. Le modèle

Considérons un stock d'eau initialement disponible $S_0 \equiv S(0)$ qu'il faut utiliser au mieux sur un intervalle de temps $[0,t_1)$ et dont une quantité $S_1 \equiv S(t_1), S_1 < S_0$, doit être mise en réserve pour un usage ultérieur. Nous supposons dans les sections 2 et 3 que ce stock ne subit aucune déperdition naturelle (évaporation ou fuites) et ne bénéficie d'aucun apport naturel de sorte que, à chaque instant $t$ de la période, son niveau $S(t)$ ne peut au mieux que rester constant : $\dot{S}(t) \equiv dS(t)/dt \leq 0$. Le volume qu'il est possible d'utiliser entre 0 et $t_1$ s'élève donc à $S_0 - S_1$. L'hypothèse d'absence d'échange naturel avec l'environnement sera relâchée à la section 4. Nous supposons aussi dans un premier temps que l'utilisation qui est faite de ce stock n'entraîne aucun coût de gestion.

Soit $u(q(t),t)$ le surplus instantané permis par une consommation $q(t)$ à l'instant $t$. Il s'agit de l'accroissement de revenu net (ou de l'équivalent en revenu net s'il s'agit de services autoconsommés) permis par une consommation $q(t)$. Il est possible que cette consommation implique de mettre en œuvre des dispositifs coûteux. Si le coût devait être supérieur au bénéfice, l'usager renoncerait à la dite consommation qui n'apparaitrait pas dans la fonction $u(.,.)$. Donc $u(q(t),t) > 0$ pour tout $q(t) > 0$ et tout $t \in [0,t_1]$.

Le surplus $u$ dépend non seulement de la consommation instantanée mais aussi de l'instant auquel elle a lieu. Le profil temporel de la fonction est propre au problème de gestion à résoudre. S'il s'agit d'un problème de gestion journalière, les fluctuations de $u$ en fonction de $t$ correspondent aux fluctuations entre heures de pointe et heures creuses, variables selon la journée considérée dans l'année. S'il s'agit d'un problème de gestion intra-annuelle des consommations qui fluctuent fortement d'une saison à l'autre, les détails intra-journaliers peuvent être négligés.

Nous supposons qu'à tout instant le surplus marginal est positif et croissant à taux décroissant tant que la consommation n'a pas atteint son niveau de saturation noté $\overline{q}(t)$, $0 < \overline{q}(t) < \infty$ :

$$u'(q(t),t) \equiv \frac{\partial u(q(t),t)}{\partial q(t)} > 0 \quad \text{et} \quad u''(q(t),t) \equiv \frac{\partial^2 u(q(t),t)}{\partial q(t)^2} < 0$$

pour $q(t) \in (0, \overline{q}(t))$. On suppose aussi que les fonctions $u$, $u'$ et $u''$ sont deux fois continûment différentiables par rapport à $t$. De plus, les surplus marginaux en $q(t) = 0$ sont bornés supérieurement, $\sup\left\{u'(0^+,t), t \in (0,t_1)\right\} < \infty$ ainsi que les niveaux de consommation de saturation, $\sup\left\{\overline{q}(t), t \in (0,t_1)\right\} < \infty$. [1]

Nous noterons parfois $p(q(t),t)$ la fonction de surplus marginal $u'(q(t),t)$ puisqu'elle représente la disposition marginale à payer des usagers ; c'est donc la fonction de demande inverse. Nous noterons $q^d(p(t),t)$ son inverse par rapport à $q(t)$, c'est-à-dire la fonction de demande directe. Sous les hypothèses posées sur $u$ la fonction $q^d(p(t),t)$ est bien définie et possède la propriété habituelle d'une fonction de demande, à savoir que la quantité demandée décroit avec le prix, partant de la valeur $\overline{q}(t)$ pour $p(\overline{q}(t),t) = 0$ jusqu'à la valeur $0$ pour $p(0^+,t) = u'(0^+,t)$

Le taux d'actualisation instantané, noté $i$, est supposé strictement positif et constant. L'hypothèse de constance est une simplification qui ne remet pas en cause les principales propriétés qualitatives des politiques optimales. L'hypothèse d'un taux strictement positif n'est pas nécessaire dans le modèle de la Section 2 où un stock d'un montant exogène doit être alloué sur une période de durée finie. En revanche, elle est indispensable pour qu'on puisse définir une politique optimale de gestion dans le modèle de

[1] Pour toute fonction $f(x)$ on note respectivement $f(x_1^-)$ et $f(x_1^+)$ les valeurs des limites $\lim_{x\uparrow x_1} f(x)$ et $\lim_{x\downarrow x_1} f(x)$ lorsque ces limites existent.

la Section 3 où la valeur du stock résiduel est endogène, donc dépend de la gestion de l'eau au-delà de la date $t_1$.

## 2. Politique optimale

L'objectif du gestionnaire du stock est de maximiser la somme des surplus actualisés, que l'on note $W$. Le problème de la gestion optimale de la partie du stock disponible pour la consommation entre $0$ et $t_1$, à savoir $S_0 - S_1 > 0$, est le problème (P.1) suivant :

$$(\text{P}.1) \quad \underset{\{q(t)\}_0^{t_1}}{Max} \quad W = \int_0^{t_1} u(q(t),t)e^{-it}dt \tag{1}$$

sous les contraintes

$$\dot{S}(t) = -q(t), \quad S(0) = S_0 \ \text{ et } \ S(t) - S_1 \geq 0, \qquad t \in [0,t_1] \tag{2}$$

$$q(t) \geq 0, \qquad t \in [0,t_1] \tag{3}$$

La première contrainte rappelle que l'évolution du stock à la date *t*, $\dot{S}(t) \overset{def}{=} \dfrac{dS(t)}{dt}$, ne dépend que du prélèvement de cette date, $q(t)$, puisqu'il n'y a ni déperdition ni apport extérieur.

Sous l'hypothèse selon laquelle le stock initialement disponible $S_0$ ne bénéficie ultérieurement d'aucun apport, la condition sur ce qu'il convient de préserver *in fine*, $S(t_1) - S_1 \geq 0$, ne peut être satisfaite que si, à chaque instant, le niveau ne descend pas au-dessous de $S_1$. A la simple condition $S(t_1) - S_1 \geq 0$, il faut donc substituer la condition plus détaillée $S(t) - S_1 \geq 0, t \in [0,t_1]$. Puisque $S_1 \geq 0$ la condition physique $S(t) \geq 0$ est *ipso facto* vérifiée, d'où la spécification (1)-(3) ci-dessus dans laquelle elle n'apparait pas.

Ce ne serait pas vrai dans un modèle où le réservoir est susceptible d'être rechargé puisque la condition $S(t) \geq S_1$ ne s'applique alors qu'en $t = t_1$. Donc aux dates antérieures, il est possible que $S(t) < S_1$. Il en résulte que la condition $S(t_1) - S_1 \geq 0$ n'impose pas $S(t) \geq 0, \ t \in [0,t_1]$. Cette dernière contrainte doit alors être posée explicitement, distinctement de $S(t_1) - S_1 \geq 0$.

## 2.1. Détermination du sentier des prélèvements

Soit $\lambda(t)$ la variable duale associée à l'équation d'évolution du stock, $\upsilon(t)$ le multiplicateur associé à la contrainte de stock minimum et $\gamma(t)$ le multiplicateur associé à la contrainte de non-négativité des prélèvements. Le hamiltonien en valeur courante $H$ et le lagrangien en valeur courante $L$ du problème (P.1) ont pour expression :[2]

$$H(t)=u(q(t),t)-\lambda(t)q(t) \quad \text{et} \quad L(t)=H(t)+\upsilon(t)\left[S(t)-S_1\right]+\gamma(t)q(t).$$

La condition de premier ordre de maximisation est la suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0 \quad \Rightarrow \quad u'\left(q(t),t\right)=\lambda(t)-\gamma(t) \tag{4}$$

condition couplée avec la condition d'écarts complémentaires :

$$\gamma(t)\geq 0\,,\; q(t)\geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma(t)q(t)=0. \tag{5}$$

La dynamique de la variable $\lambda(t)$ doit satisfaire la condition :

$$\dot{\lambda}(t)=i\lambda(t)-\frac{\partial L}{\partial S(t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t)=i\lambda(t)-\upsilon(t)\,, \tag{6}$$

condition à coupler avec la condition d'écart complémentaire :

$$\upsilon(t)\geq 0, \quad S(t)-S_1\geq 0 \quad \text{et} \quad \upsilon(t)\left[S(t)-S_1\right]=0. \tag{7}$$

Notons $\overline{t_S}$ la date ultime d'exploitation active du stock :

$$\overline{t_S}=\begin{cases}\inf\left\{t:q(\tau)=0\,,\tau\in(t,t_1]\right\} & \text{s'il existe } t<t_1:q(\tau)=0\,,\tau\in(t,t_1] \\ t_1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Puisque $S(t)>S_1$ à toute date antérieure à $\overline{t_S}$, alors $\upsilon(t)=0$ à ces mêmes dates (cf. (7)). Donc, la condition (6) implique que $\dot{\lambda}(t)=i\lambda(t)$ et, après intégration,

[2] Pour une introduction à la théorie de la commande optimale on pourra consulter les ouvrages de Kamien et Schwartz (1992) et Léonard et Long (1992) ou les ouvrages plus avancés de Caputo (2005) et Seierstad et Sydsaeter (1987). Albouy (1972) est remarquablement clair sur le passage de modèles en temps discret à des modèles en temps continu.

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{it} \quad , \quad t \in [0, \bar{t}_S] \tag{8}$$

où $\lambda_0 \equiv \lambda(0)$.

Il en résulte que pour caractériser la politique optimale il faut et il suffit de

* déterminer $\lambda_0$ en utilisant (4), tel que :

$$u'(q(t), t) = \lambda_0 e^{it} - \gamma(t) \tag{9}$$

où $$\gamma(t) = \begin{cases} \lambda_0 e^{it} - u'(0^+, t) & \text{si} \quad \lambda_0 e^{it} > u'(0^+, t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{10}$$

* satisfaire les conditions de non gaspillage :[3]

$$q(t) = \bar{q}(t) \quad \text{si} \quad \lambda_0 = 0. \tag{11}$$

* et satisfaire la condition de non dépassement de la somme des prélèvements permis:

$$\int_0^{t_1} q(t)dt \leq S_0 - S_1. \tag{12}$$

La condition qui permet de déterminer $\lambda_0$ est la condition d'équilibre entre consommation cumulée sur la période de planification et stock disponible, c'est-à-dire la condition (12) après y avoir fait apparaître $\lambda_0$ . La consommation optimale à l'instant $t$ est la consommation $q^d(\lambda_0 e^{it}, t)$ solution de (9)-(12). La condition d'équilibre a donc pour expression :

$$\int_0^{t_1} q^d(\lambda_0 e^{it}, t)dt = S_0 - S_1, \tag{13}$$

si cette équation a une solution positive $\lambda_0^* > 0$ . Sinon, c'est à dire si $\int_0^{t_1} \bar{q}(t)dt < S_0 - S_1$, alors la ressource a une valeur nulle :

$$\lambda_0^* = 0.$$

[3] Lorsque $\lambda_0 > 0$ les équations (9) et (10) ont une solution unique. Lorsque $\lambda_0 = 0$, i.e., $\lambda(t) = 0, t \in [0, t_1]$, toute consommation supérieure à $\bar{q}(t)$ n'apporte aucun surplus additionnel par rapport à la consommation de saturation $\bar{q}(t)$.

## 2.2. Interprétation économique

L'interprétation économique de ces conditions est la suivante. Le multiplicateur $\lambda_0$ est la valeur marginale du stock d'eau, en valeur actualisée à la date $t = 0$. Les conditions (4), (5) et (8), ou de façon équivalente les conditions (9) et (10), spécifient que les prélèvements doivent être répartis de façon à ce que, à chaque instant, le surplus marginal en valeur actualisée soit le même :

$$u'(q(t),t)e^{-it} = \lambda_0, \quad \forall t \in [0, t_1) \text{ tel que } q(t) > 0.$$

Si ce n'était pas le cas, la somme des surplus actualisés, fonction d'objectif du problème, pourrait être augmentée en réduisant la consommation de la date à laquelle le surplus marginal est le plus faible pour l'accroitre à la date à laquelle il est le plus élevé. C'est une conséquence de l'hypothèse selon laquelle le surplus marginal de toute date est une fonction décroissante de la consommation à la même date et du fait qu'il est toujours techniquement possible de transférer la consommation de n'importe quelle date à n'importe quelle autre date. L'arbitrage est illustré à la Figure 1.

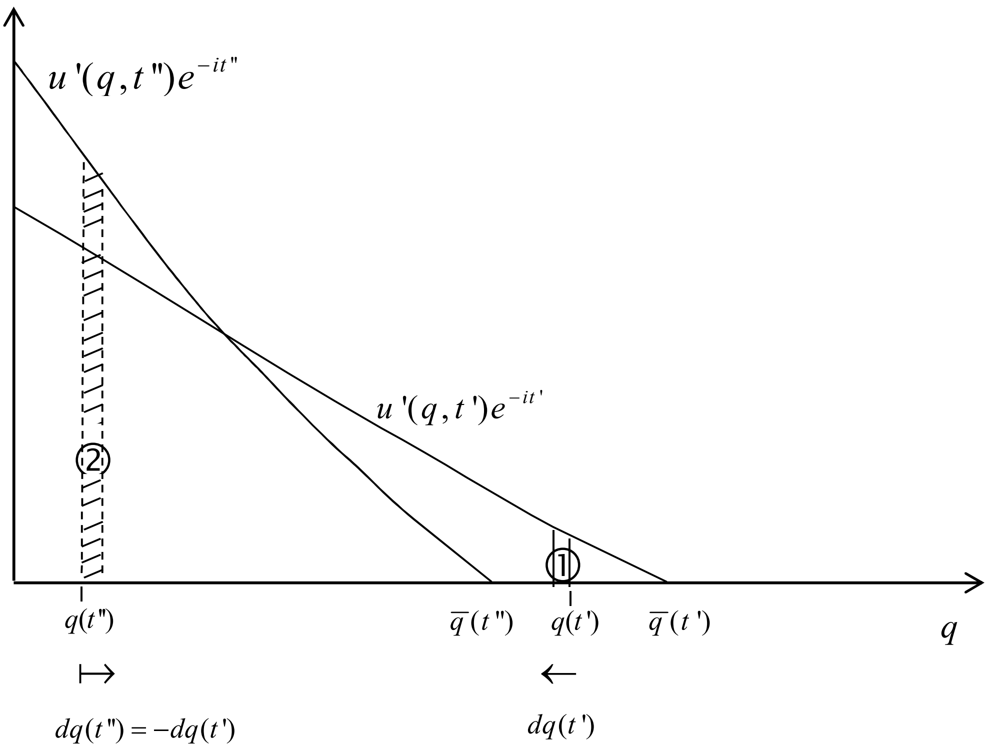


**Figure 1 : Nécessité de l'arbitrage**

Sur la Figure 1, les consommations aux dates $t'$ et $t''$, $t' \neq t''$, sont respectivement $q(t')$ et $q(t'')$ tels que $u'(q(t'),t')e^{-it'} < u'(q(t''),t'')e^{-it''}$. Une réduction $dq(t') < 0$ de la consommation $q(t')$ en $t'$ implique une réduction de surplus actualisé représentée par la surface 1 et son transfert à la date $t''$ implique un accroissement de surplus actualisé représenté par la surface 2, supérieur à la perte subie en $t'$.

De l'équation (9) de détermination de la consommation optimale instantanée, on déduit le taux de variation de cette consommation, $\dot{q}(t) \equiv dq(t)/dt$, lorsqu'elle est positive et donc $\gamma(t) = 0$. Différentions (9) par rapport au temps :

$$u''(q(t),t)\dot{q}(t) + \partial u'(q(t),t)/\partial t = i\lambda_0 e^{it}, \tag{14}$$

d'où :

$$\dot{q}(t) = \frac{i\lambda_0^* e^{it} - \partial u'(q(t),t)/\partial t}{u''(q(t),t)} = \frac{iu'(q(t),t) - \partial u'(q(t),t)/\partial t}{u''(q(t),t)}, \tag{15}$$

expression dont le dénominateur est négatif.

On voit qu'il ne suffit pas que la demande soit en voie d'intensification c'est-à-dire que $\partial u'(q(t),t)/\partial t > 0$, pour que la consommation augmente, encore faut-il qu'elle s'intensifie suffisamment. Si la fonction de demande est stationnaire, c'est-à-dire lorsque $\partial u'(q(t),t)/\partial t = 0$, alors la consommation doit baisser à cause de l'actualisation.

Lorsque $\dot{q}(t) = 0$, la consommation atteint un maximum local si $\ddot{q}(t) \equiv d^2q(t)/dt^2 < 0$, un minimum si $\ddot{q}(t) > 0$. En différentiant (15) par rapport au temps, puis en annulant $\dot{q}(t)$, on obtient finalement :[4]

$$\ddot{q}(t) = \frac{i^2\lambda_0^* e^{it} - \partial^2 u'(q(t),t)/\partial t^2}{u''(q(t),t)} = \frac{i^2 u'(q(t),t) - \partial^2 u'(q(t),t)/\partial t^2}{u''(q(t),t)} \tag{16}$$

Le niveau de consommation $q(t)$ est donc un maximum local lorsque $\dot{q}(t) = 0$, si l'accélération de la valeur marginale du stock d'eau non encore utilisée, $i^2\lambda_0^* e^{it}$, est supérieure à l'accélération du surplus marginal correspondant à ce niveau de

[4] De la différentiation totale de (15) on déduit que $\ddot{q}(t) = \frac{i^2\lambda_0^* e^{it} - u''\dot{q} - \partial^2 u'/\partial t^2}{u''} - \frac{\left(i\lambda_0^* e^{it} - \partial u'/\partial t\right)\left(u'''\dot{q} + \partial u''/\partial t\right)}{u''}$ où $u'''(q(t),t) = \frac{\partial^3 u(q(t),t)}{\partial q(t)^3}$. Si $\dot{q} = 0$, alors $i\lambda_0^* e^{it} - \partial u'/\partial t = 0$ par (15), d'où l'expression (16).

consommation, $\frac{\partial^2 u'(q(t),t)}{\partial t^2}$. Notons que, d'après (15), ce surplus marginal est croissant : $\partial u'(q(t),t)/\partial t = i\lambda_0^* e^{it} > 0.$ La consommation $q(t)$ est un maximum si, bien qu'en croissance, à la vitesse de croissance en question le surplus marginal est en phase de décélération ou, s'il s'agit d'une phase d'accélération, cette accélération n'est pas trop forte ; soit, en combinant $\dot{q}(t) = 0$ et $\ddot{q}(t) < 0$ : $i > \frac{\partial^2 u'(q(t),t)/\partial t^2}{\partial u'(q(t),t)/\partial t}$ où *i* est l'accélération relative de la valeur marginale du stock.

## 2.3. Effet d'un accroissement du stock initial

Montrons que tout léger accroissement du stock disponible $d(S_0 - S_1) > 0$ permet d'accroitre la valeur optimisée de la fonction d'objectif (1) d'un montant approximativement égal à $\lambda_0^* d(S_0 - S_1)$. Comme la répartition optimale du stock initial conduit à égaliser entre eux les surplus marginaux actualisés de toutes les dates auxquelles il y a prélèvement, l'accroissement de la fonction d'objectif est obtenu en répartissant uniformément $d(S_0 - S_1)$ entre toutes les dates auxquelles la consommation $q^d(\lambda_0^* e^{it}, t)$ est positive.

Soit $m(\lambda_0^*)$ la mesure des intervalles de temps au cours desquels $q^d(\lambda_0^* e^{it}, t) > 0$. Dans ces intervalles, la contribution de l'accroissement de la consommation à l'instant $t$ à la variation de la valeur optimisée de la fonction d'objectif s'élève à :

$$u'(q^d(\lambda_0^* e^{it}, t), t)e^{-it} \frac{d(S_0 - S_1)}{m(\lambda_0^*)} = \lambda_0^* \frac{d(S_0 - S_1)}{m(\lambda_0^*)}.$$

Soit $\Theta(\lambda_0^*)$ l'ensemble des dates auxquelles il est optimal de procéder à des prélèvements :

$$t \in \Theta(\lambda_0^*) \quad \Rightarrow \quad q^d(\lambda_0^* e^{it}, t) > 0.$$

Alors la variation totale de la fonction d'objectif (1) est approximativement égale à :

$$\begin{aligned} dW &\approx \frac{d(S_0 - S_1)}{m(\lambda_0^*)} \int_{t\in\Theta(\lambda_0^*)} u'(q^d(\lambda_0^* e^{it}, t)e^{-it} dt \\ &= \frac{d(S_0 - S_1)}{m(\lambda_0^*)} .m(\lambda_0^*)\lambda_0^* = \lambda_0^* d(S_0 - S_1). \end{aligned} \tag{17}$$

L'accroissement du stock disponible pour prélèvements $S_0 - S_1$ a aussi pour effet de déprimer la valeur marginale du dit stock. La ressource est moins rare, donc sa valeur marginale diminue. Pour le montrer, différentions la relation (13) déterminant la valeur $\lambda_0^*$ de $\lambda_0$. On obtient :[5]

$$\frac{d\lambda_0^*}{d(S_0 - S_1)} = \frac{1}{\int_0^{t_1} \frac{\partial q^d(\lambda_0^* e^{it}, t)}{\partial p(t)} .e^{it} dt} < 0. \qquad (18)$$

La valeur marginale actualisée du stock d'eau disponible $S_0 - S_1$, décroit de $\sup\left\{u'(0^+, t)e^{-it}, 0 < t < t_1\right\}$, la plus forte valeur marginale actualisée partant d'une consommation nulle sur la totalité de l'intervalle $[0, t_1)$, à 0 lorsque, à chaque instant, les niveaux de consommation de saturation sont permis, c'est-à-dire lorsque $\int_0^{t_1} \bar{q}(t)dt \leq S_0 - S_1$.

Un second effet induit est l'extension de la durée des phases au cours desquelles la consommation $q^d(\lambda_0^* e^{it}, t)$ est positive lorsqu'il existe des intervalles de temps au cours desquels elle est nulle.

Ce sont les raisons pour lesquelles la formule (17) n'est qu'une approximation a minima de la variation de $W$ produite par la variation de $S_0 - S_1$.

## 3. Valeur du stock résiduel

Nous avons supposé jusqu'ici que $S_1$, le stock à conserver, était une donnée. Mais les besoins à satisfaire ne disparaissent pas à l'instant $t_1$. Préserver un stock résiduel $S_1$ plus ou moins important permet de tenir compte des besoins à satisfaire au-delà de $t_1$, et ces besoins futurs sont à mettre en balance avec ceux de la période $[0, t_1]$

Une première approche, synthétique, consiste à attribuer une valeur $V(S_1)$, valeur à la date $t_1$, au stock résiduel $S_1$. Une seconde approche plus analytique détaille la façon dont doit être construite cette fonction valeur.

[5] La négativité de $\partial q^d(\lambda_0^* e^{it}, t) / \partial p(t)$ est une conséquence de l'hypothèse $u''(q(t), t) < 0$.

### 3.1 Valeur exogène du stock résiduel

Supposons donnée la fonction $V(S_1)$, deux fois continûment différentiable, croissante à taux décroissant sur un intervalle $(0,\bar{S}_1)$ :

$$V'(S_1) \equiv \frac{dV(S_1)}{dS_1} > 0\,,\ V''(S_1) \equiv \frac{d^2V(S_1)}{dS_1^2} < 0,\ S_1 \in (0,\bar{S}_1)$$

et constante sur $\left[\bar{S}_1,\infty\right)$. On pose de plus que $V'\left(0^+\right) < \infty$.

Le problème de la détermination du plan optimal est maintenant le problème (P.2) suivant :

$$\text{(P.2)} \qquad \underset{S_1,\{q(t)\}_0^{t_1}}{Max} \int_0^{t_1} u(q(t),t)\,e^{-it}dt + e^{-it_1}V(S_1) \qquad (19)$$

sous les mêmes contraintes (2) et (3) que celles du problème (P.1) et les contraintes additionnelles :

$$S_0 - S_1 \geq 0 \text{ et } S_1 \geq 0. \qquad (20)$$

Pour tout $S_1$, $0 \leq S_1 \leq S_0$, notons $W^*(S_1)$ la valeur optimisée de la consommation cumulée $S_0 - S_1$ sur l'intervalle de temps $(0,t_1)$, c'est-à-dire la valeur optimisée de la fonction d'objectif (1) du problème (P.1). Le problème (P.2) admet la formulation équivalente (P.3) :

$$\text{(P.3)} \qquad \underset{S_1}{Max}\ W^*(S_1) + e^{-it_1}V(S_1) \qquad (21)$$

sous les contraintes (20).

Soit $\bar{\gamma}_S$ le multiplicateur associé à la contrainte de valeur maximale de $S_1$ et $\underline{\gamma}_S$ le multiplicateur associé à la contrainte de non négativité. Le lagrangien du problème (P.3) a pour expression :

$$L = W^*(S_1) + e^{-it_1}V(S_1) + \bar{\gamma}_S\left[S_0 - S_1\right] + \underline{\gamma}_S S_1.$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\frac{\partial L}{\partial S_1}=0 \quad \Rightarrow \quad e^{-it_1}V'(S_1)=-\frac{dW^*(S_1)}{dS_1}+\overline{\gamma}_S-\underline{\gamma}_S \qquad (22)$$

$$\overline{\gamma}_S \geq 0,\ S_0-S_1\geq 0 \quad \text{et} \quad \overline{\gamma}_S\left[S_0-S_1\right]=0 \qquad (23)$$

$$\underline{\gamma}_S \geq 0,\ S_1\geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}_S S_1=0 \qquad (24)$$

La fonction $W^*(S_1)$ est une fonction décroissante (cf. (17)). De plus, puisque $\lambda_0^*$ est la valeur marginale du stock $S_0-S_1$ utilisé au mieux entre $t=0$ et $t=t_1$, alors $\lambda_0^*=-dW^*(S_1)/dS_1$, et la fonction $\lambda_0^*(S_1)$ est une fonction croissante (cf. (18)). Le membre gauche de (22) est une fonction décroissante sur l'intervalle $(0,\overline{S}_1)$ sous l'hypothèse $V''(S_1)<0$, et nulle pour $S_1\geq\overline{S}_1$.

Le niveau optimal de $S_1$, noté $S_1^*$, est donc

* étant donné (17) et (22) le niveau solution de l'équation

$$e^{-it_1}V'(S_1)=\lambda_0^*(S_1) \qquad (25)$$

si cette équation admet une solution comprise entre 0 et $S_0$.

* $S_1^*=0$ si $\lambda_0^*(0)\geq e^{-it_1}V'(0)$ : la totalité du stock $S_0$ doit être consommée entre $0$ et $t_1$, et les équations (22)-(24) sont satisfaites avec $\overline{\gamma}_S=0$ et $\underline{\gamma}_S=\lambda_0^*(0)-e^{-it_1}V'(0)$.

* $S_1^*=S_0$ si $\lambda_0^*(S_0)\leq e^{-it_1}V'(S_0)$ : la totalité du stock initial $S_0$ doit être réservée pour une utilisation postérieure à $t_1$, et les équations (22)-(24) sont satisfaites avec $\overline{\gamma}_S=e^{-it_1}V'(S_0)-\lambda_0^*(S_0)$ et $\underline{\gamma}_S=0$.

L'argument est illustré à la Figure 2. Sur l'axe des abscisses sont portées les valeurs possibles de $S_1$ qui varie de $0$ à $S_0$. La courbe décroissante est celle de la fonction $e^{-it_1}V'(S_1)$. On a supposé que $S_0<\overline{S}_1$. Les courbes croissantes représentent diverses fonctions $\lambda_0^*(S_1)$ possibles. Pour $S_1=0$, $\lambda_0^*(0)$ est nul ou positif selon que $\int_0^{t_1}\overline{q}(t)dt$ est inférieur ou supérieur à $S_0$ (cf. Section 2). Il est donc possible a priori que $\lambda_0^*(0)$ soit supérieur à $e^{-it_1}V'(0)$, cas représenté par la courbe croissante la plus élevée et dans lequel $S_1^*=0$ : la totalité du stock $S_0$ doit être consommée entre 0 et $t_1$.

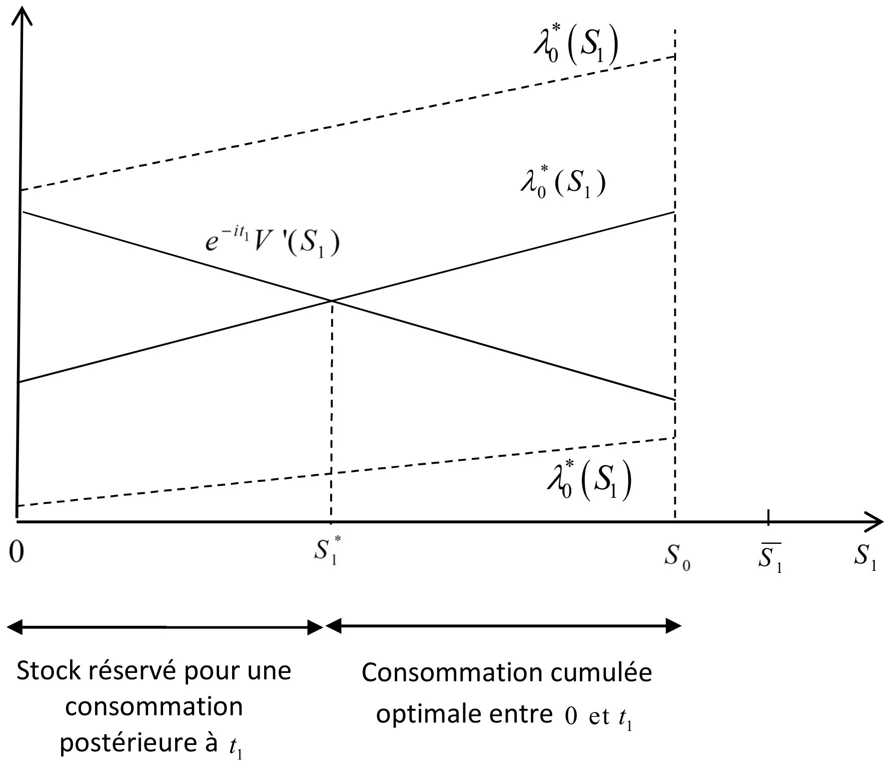


**Figure 2 : Détermination du stock résiduel optimal**

En $S_1 = S_0$, $\lambda_0^*(S_0) = \sup\{u'(0^+,t)e^{-it}, 0 \le t < t_1\}$ et il est possible que $\lambda_0^*(S_0) < e^{-it_1} V'(S_0)$, cas représenté par la courbe croissante la plus basse et dans lequel $S_1^* = S_0$ : la totalité du stock initial $S_0$ doit être réservée pour une utilisation au-delà de $t_1$.

Enfin la courbe croissante intermédiaire représente le cas d'une fonction $\lambda_0^*(S_1)$ telle que $S_1^*$ est compris entre 0 et $S_0$.

## 3.2 Valeur endogène du stock résiduel

La valeur du stock résiduel $S_1$ dépend de l'usage qui en sera fait au-delà de $t_1$, usage qui lui-même doit être optimisé. Détaillons cette optimisation.

Considérons la suite de périodes $[t_n, t_{n+1}), n = 0,1,\cdots,\infty$ démarrant en $t_0 = 0$, chacune de durée $\Delta$: $t_{n+1} - t_n = \Delta, n = 0,1,\cdots$, chaque période correspondant à un cycle de fluctuations de la fonction de surplus, par exemple l'année. Bien que les principales caractéristiques qualitatives de la fonction de surplus soient identiques d'un cycle à l'autre, la fonction n'est pas nécessairement la même. En d'autres termes, on ne pose pas que nécessairement $u(q(n\Delta+\tau), n\Delta+\tau) = u(q(m\Delta+\tau), m\Delta+\tau), \tau \in [0,\Delta)$, $m, n = 0, 1, \cdots$

On supposera néanmoins que les surplus marginaux sont bornés supérieurement $\sup\{u'(0^+, n\Delta+\tau), \tau \in [0,\Delta), n \geq 0\} \equiv \bar{u}'(0^+) < \infty$, ainsi que les consommations de saturation à partir desquelles les surplus marginaux s'annulent : $\sup\{\bar{q}_n, n \geq 0\} \equiv \bar{q} < \infty$ où $\bar{q}_n = \sup\{q(n\Delta+\tau) : u'(q(n\Delta+\tau), n\Delta+\tau) = 0, \tau \in [0,\Delta)\}, n \geq 0$, les surplus marginaux étant tous décroissants lorsqu'ils sont positifs.

Enfin notons $i_n$ le taux d'actualisation propre au $n^{\text{ème}}$ cycle, taux que l'on suppose constant au cours du cycle en question : $i(n\Delta+\tau) = i_n, \tau \in [0,\Delta), n = 0, 1, \ldots$, ces taux étant strictement positifs et bornés inférieurement et supérieurement : $0 < \underline{i} \leq i_n \leq \bar{i} < \infty, \ n = 0, 1, \ldots$

La somme des surplus actualisés en $t = 0$ a maintenant pour expression :

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} u\big(q(t), t\big)\, e^{-g(t)} dt \tag{26}$$

où $g(t)$, le taux d'actualisation permettant de ramener les valeurs courantes de la date $t$ à des valeurs en $t=0$, a pour expression :

$$g(t) = \begin{cases} i_0 t & \text{si } t \in [0,\Delta) \\ \left(\sum_{k=0}^{n} i_k\right)\Delta + i_n(t - n\Delta) & \text{si } t \in [n\Delta, (n+1)\Delta) \text{ et } n \geq 1 \end{cases} \tag{27}$$

Les conditions d'arbitrage qui, dans les développements précédents, ont permis de déterminer l'allocation optimale du stock, restent pertinentes ici car il est toujours possible de transférer la consommation d'une date d'un cycle quelconque à n'importe quelle autre date soit du même cycle, soit d'un autre cycle. Il faut donc répartir les consommations de façon à égaliser les surplus marginaux actualisé, d'où :

$\forall t' \in [n\Delta, (n+1)\Delta)$ et $t'' \in [m\Delta, (m+1)\Delta), n \geq 0, m \geq 0$ et $m \geq n$ :

$$u'(q(t'), t')e^{-g(t')} = u'(q(t''), t'')e^{-g(t'')} \text{ si } q(t') > 0 \text{ et } q(t'') > 0 \tag{28}$$

et

$$u'(0^+,t')e^{-g(t')} \leq u'(q(t''),t'')e^{-g(t'')} \text{ si } q(t')=0 \text{ et } q(t'')>0. \quad (29)$$

La valeur commune du surplus marginal actualisé, $\lambda_0$, est alors déterminée comme dans le cas précédent, par la condition d'égalité de la consommation cumulée au cours du temps et du stock initialement disponible $S_0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} q^d\left(\lambda_0 e^{g(t)},t\right)dt = S_0. \quad (30)$$

Soit $\lambda_0^* > 0$ la solution de cette équation.

Notons que, puisque $i_n$ est au moins égal à $\underline{i} > 0$ et ce pour tout *n*, alors $\lim_{t\uparrow\infty} g(t) = \infty$. Sous l'hypothèse $\overline{u}'(0^+) < \infty$, il existe donc une dernière période $\overline{n}$ au-delà de laquelle la consommation est nécessairement nulle :

$$\overline{n} = \min\{n : \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} q^d(\lambda_0^* e^{g(\tau)},\tau)d\tau > 0 \text{ et } q^d(\lambda_0^* e^{g(t)},t) = 0,\ t > (n+1)\Delta\}. \quad (31)$$

Dans la formulation de la section 2, le montant du stock à réserver qu'il faut prendre en compte pour obtenir les consommations optimales de la période $(0,t_1)$ est donc

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\overline{n}}\int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} q^d(\lambda_0^* e^{g(t)},t)dt. \quad (32)$$

La valeur optimale $\lambda_0^*$ de $\lambda_0$ dépend du stock $S_0$ initialement disponible et la fonction $\lambda_0^*\left(S_0\right)$ qui décrit cette dépendance est une fonction décroissante. La valeur du programme, $W\left(S_0\right)$, a alors pour expression

$$W\left(S_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} u(q^d(\lambda_0^*(S_0)e^{g(t)}),t)\, e^{-g(t)}dt$$

Il est clair que $dW\left(S_0\right)/dS_0 > 0$.

Pour internaliser l'ensemble de l'horizon temporel dans la détermination des consommations optimales de la période $\left[0,t_1\right)$ et donc le stock résiduel optimal (32) ci-dessus, dans la Sous-section 3.1 précédente, la fonction $V(S_1)$ devrait être construite de la façon dont nous venons de construire $W(S_0)$.[6]

## 3.3 Taux d'actualisation et évolution de la fonction de surplus

Dans le modèle à une seule période de la Section 2 ou dans le modèle de la section 3.2 où la valeur du stock à laisser pour l'avenir est exogène, il existe une solution au problème de l'allocation optimale de la ressource entre les dates composant cette période même si le taux d'actualisation est nul. En revanche, quand la valeur du stock à conserver est endogène, il est nécessaire que le taux d'actualisation soit positif pour que le problème de l'allocation optimale du stock $S_0$ ait une solution.

Dans cette section, nous nous interrogeons sur les conséquences de la combinaison d'un taux d'actualisation positif ou non d'une part, et d'une évolution particulière de la fonction de surplus marginal d'autre part sur l'allocation de la ressource entre les différentes dates du plan de prélèvement. On comprend bien par exemple qu'une fonction d'utilité marginale décroissant dans le temps encourage les consommations présentes, alors qu'une fonction croissante conduit à économiser la ressource aujourd'hui, sauf si le taux d'escompte est très élevé puisqu'alors l'avenir pèse relativement moins que le présent. Pour situer le problème, commençons par le cas le plus simple, celui d'une fonction d'utilité marginale stationnaire.

### 3.3.1 Demande stationnaire

Supposons que, de cycle en cycle, la fonction $u$ soit la même,

$$u(q(n\Delta+\tau), n\Delta+\tau) = u(q(m\Delta+\tau), m\Delta+\tau), \tau \in [0,\Delta), \; n,m \geq 0$$

et supposons aussi que les taux d'actualisation soient tous nuls, $i_n = 0, n = 0,1,\ldots$

On peut alors écrire les fonctions de surplus marginal et de demande d'une période quelconque respectivement sous les formes $u'(q(\tau),\tau)$ et $q^d(p(\tau),\tau)$ où $\tau \in [0,\Delta)$ n'est pas

[6] En particulier lorsque la demande est la même d'un cycle à l'autre (cf. paragraphe 3.3.1 ci-dessous), si on note $W_n(S_n)$ la valeur en $t = n\Delta$ d'un programme démarrant à cette date avec un stock $S_n$, et si, de plus, le taux d'actualisation est le même à chaque période, $i_n = i > 0,\; n = 0,1,\ldots,$ alors pour tous $m,n = 0,1,\ldots,$ et tous $S_n, S_m$ on peut écrire : $S_n = S_m \Rightarrow W_n(S_n) = W_m(S_m)$.

la date calendaire mais la date dans le cycle, c'est-à-dire en prenant comme origine du temps pour chaque cycle le début du cycle.

Considérons alors le problème de la répartition de $S_0$ sur un nombre de périodes $k, k > 0$, fixé et fini. Sous cette restriction la meilleure répartition est l'équi-répartition qui consiste à allouer à chaque période ou cycle une même quantité d'eau à consommer et, à l'intérieur de chacune de ces périodes, à répartir le stock $S_0 / k$ de façon à ce que le surplus marginal soit le même à toutes les dates auxquelles la consommation est positive. C'est une conséquence immédiate de l'hypothèse selon laquelle le surplus marginal $u'(q(\tau),\tau)$ est une fonction décroissante de $q(\tau)$ en tout $\tau \in [0,\Delta)$. Puisque le taux d'actualisation est nul, si $\lambda_0$ est la valeur marginale du stock $S_0 / k$, la condition d'égalité de la consommation cumulée au cours d'une période et du stock disponible pour la période s'écrit de la façon suivante

$$\int_0^\Delta q^d\left(\lambda_0,\tau\right)d\tau = \frac{S_0}{k}.$$

Soit $\lambda_0^*(k)$ la solution de cette équation. Puisque $u'(q(\tau),\tau)$ décroit avec $q(\tau)$, alors :

$$\lambda_0^*(k+1) > \lambda_0^*(k) \text{ et } \lim_{k\uparrow\infty} \lambda_0^*(k) = \sup\left\{u'(0^+,\tau), \tau \in [0,\Delta)\right\}.$$

En conclusion, la meilleure façon d'utiliser le stock $S_0$ sur un nombre fini de périodes, *k*, est d'en consommer la même part $S_0 / k$ au cours de chaque période. Mais la valeur marginale de $S_0$ est d'autant plus élevée que le nombre de périodes sur lesquelles la consommation est étalée est lui-même élevé. Il en résulte que le mieux est de répartir cette consommation sur un nombre infini de périodes et donc de ne rien consommer au cours de chacune d'elles.

Le cas d'une demande stationnaire, c'est-à-dire de fonctions de surplus identiques de période en période, est en quelque sorte le cas pivot lorsque le taux d'actualisation est nul. On retrouve avec cette analyse la réponse au problème d'équité posé par Rawls (1971) et l'application du critère qu'il propose au problème de l'équité entre générations. Ce point est développé dans l'Annexe I.

### 3.3.2. Demande variable

Soit maintenant des fonctions de surplus propres à chaque période et supposons toujours que les taux d'actualisation sont tous nuls. Notons $u_n(q(\tau),\tau)$ la fonction de la période $n$, $[t_n, t_{n+1}) = [n\Delta, (n+1)\Delta)$, où $\tau$ est la date dans la période, mesurée à compter du temps calendaire $t = n\Delta$, début de la période en question, $u_n^{'}(p(\tau),\tau)$ et $q_n^d(p(\tau),\tau)$ étant respectivement les fonctions de surplus marginal et de demande correspondantes.

### * Variation par effet multiplicatif

Pour illustrer les cas soit de régression, soit d'expansion de la demande, considérons le système de surplus suivant :

$$u_{n+1}(q(\tau),\tau) = \theta u_n(q(\tau),\tau) \quad , \quad \tau \in [0,\Delta), \;\; n = 0,1,2,...$$

La demande est décroissante, stationnaire ou croissante de période en période selon que, respectivement, $\theta \in (0,1)$, $\theta = 1$ ou $\theta > 1$.

Les utilités marginales à la même date $\tau$ dans chacune des deux périodes successives $n$ et $n+1$ vérifient une relation identique :

$$u_{n+1}^{'}(q(\tau),\tau) = \theta u_n^{'}(q(\tau),\tau) \quad , \quad \tau \in [0,\Delta), \;\; n = 0,1,2,...$$

Etant donné cette relation de proportionnalité, ne dépendent d'une période $n$ sous examen :

i- ni le niveau de prélèvement $\overline{q}(\tau)$ à partir duquel la consommation de la date $\tau$ est saturée :

$$u_{n+1}^{'}(\overline{q}(\tau),\tau) = 0 = u_n^{'}(\overline{q}(\tau),\tau) \quad , \quad \tau \in [0,\Delta), \;\; n = 0,1,2,...$$

ii- ni l'ensemble $\overline{\mathrm{T}} \subseteq [0,\Delta)$ des dates auxquelles $u_n^{'}(0^+,\tau)$ atteint un maximum en supposant qu'un tel maximum existe :[7]

$$\overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad u_n^{'}(0^+,\overline{\tau}) \geq u_n^{'}(0^+,\tau), \tau \in [0,\Delta) \;\; \text{et} \;\; n = 0,1,2,...$$

[7] On exclut que $\lim_{\tau \uparrow \Delta} u_n^{'}(0^+,\tau) > u_n^{'}(0^+,\tau), \tau \in [0,\Delta)$.

iii- ni l'ensemble $\underline{\mathrm{T}} \subseteq [0,\Delta)$ des dates auxquelles $u_0^{'}(0^+,\tau)$ atteint un minimum en supposant qu'un tel minimum existe :[8]

$$\underline{\tau} \in \underline{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad u_n^{'}(0^+,\underline{\tau}) \le u_n^{'}(0^+,\tau), \tau \in [0,\Delta) \text{ et } n = 0,1,2,...$$

iv- ni les taux marginaux de substitution entre les consommations de deux dates de la période

$$\frac{u_{n+1}^{'}(q,\tau)}{u_{n+1}^{'}(q',\tau')} = \frac{u_n^{'}(q,\tau)}{u_n^{'}(q',\tau')}, \quad 0 \le \tau, \tau' < \Delta, \quad 0 < q < \overline{q}(\tau) \text{ et } 0 < q' < \overline{q}(\tau'), \quad n = 0,1,2...$$

Une conséquence de ces propriétés est que, si $Q$ est la somme des prélèvements possibles au cours d'une période $n$, leur répartition optimale dans la période ne dépend pas de la période $n$ considérée. En effet, si la répartition est optimale, on doit avoir l'égalité des utilités marginales pour toute paire de dates $\tau$ et $\tau'$ de la période auxquelles les prélèvements $q(\tau)$ et $q(\tau')$ sont positifs et plus faibles que les niveaux de saturation : si $0 < q(\tau) < \overline{q}(\tau)$ et $0 < q(\tau') < \overline{q}(\tau')$, alors $u_n^{'}(q(\tau),\tau) / u_n^{'}(q(\tau'),\tau') = 1$. Et puisque les taux marginaux de substitution sont les mêmes à toutes les périodes on a aussi $u_{n+1}^{'}(q(\tau),\tau) / u_{n+1}^{'}(q(\tau'),\tau') = 1$.

La somme des prélèvements optimisés d'une période $n$ qui permet d'en saturer les besoins, que l'on note $\overline{Q}$, ne dépend pas non plus de la période en question :

$$\overline{Q} \equiv \int_0^{\Delta} \overline{q}(\tau) d\tau.$$

Définissons $V_0(Q)$ comme la valeur au début de la période 0 de la somme des surplus correspondant à la répartition optimale de $Q$ :

$$V_0(Q) = \int_0^{\Delta} u_0(q^*(\tau),\tau) d\tau$$

où $q^*(\tau)$ est la solution de

$$\max_{q(\tau), 0 \le \tau < \Delta} \int_0^{\Delta} u_0(q(\tau),\tau) d\tau$$

sous la condition

$$Q - \int_0^{\Delta} q(\tau) d\tau \ge 0 .$$

[8] On exclut que $\lim_{\tau \uparrow \Delta} u_0^{'}(0^+,\tau) < u_0^{'}(0^+,\tau), \tau \in [0,\Delta)$.

La fonction $V_0(Q)$ est croissante sur l'intervalle $[0,\bar{Q})$ puis constante sur l'intervalle $[\bar{Q},\infty)$. Sa dérivée $V_0^{'}(Q)$, la valeur marginale de $Q$, est décroissante et continue sur $[0,\bar{Q})$ avec $\lim_{Q\uparrow\bar{Q}} V^{'}(Q)=0$, mais n'est pas elle-même nécessairement différentiable.

Par définition $V_0^{'}(Q)=\lambda_0$ .

## * Demande décroissante

Si la ressource perd de sa valeur lorsqu'on en diffère la consommation, le stock $S_0$ doit être écoulé au cours d'un nombre fini de premières périodes.

Supposons d'abord les prélèvements optimaux distribués sur un nombre infini de périodes et montrons que cela implique une contradiction. Puisque $S_0$ est fini, si les prélèvements sont répartis sur un nombre infini de périodes, il existe une suite de périodes telle que la somme des prélèvements de chaque période est positive, décroit de période en période retenues dans la suite et tend vers 0.

Soit deux périodes de la suite d'indices $j$ et $k$, $j<k$, et donc telles que :

$$Q_k < Q_j < \bar{Q} \quad \Rightarrow \quad V_0(Q_k) < V_0(Q_j) < V_0(\bar{Q}).$$

Les contributions de ces périodes au bien-être $W$ s'élèvent respectivement à

$$\theta^j V_0(Q_j) \text{ et } \theta^k V_0(Q_k)$$

où $\theta \in (0,1)$.

Affectons à la période $j$ les prélèvements de la période $k$ en sus de $Q_j$. La variation de bien-être qui en résulte, s'élève à :

$$\theta^j \left[ V_0(Q_j+Q_k) - V_0(Q_j) \right] - \theta^k V_0(Q_k).$$

Après division par $Q_{k,}$ on obtient, puisque $Q_k$ tend vers 0 si $k$ tend vers $\infty$ :[9]

$$\lim_{k\uparrow\infty} \left\{ \theta^j \frac{V_0(Q_j+Q_k)-V_0(Q_j)}{Q_k} - \theta^k \frac{V_0(Q_k)}{Q_k} \right\}$$

$$= \theta^j V_0^{'}(Q_j^+) - V_0^{'}(0^+) \lim_{k\uparrow\infty} \theta^k = \theta^j V_0^{'}(Q_j) > 0.$$

[9] Si en $Q_j$ la fonction $V$ est différentiable, on peut substituer $V'(Q_j)=V'(Q_j^+)$ dans les expressions ci-dessous.

On conclut que supprimer les prélèvements $Q_k$ de la période $k$ pour les affecter à la période antérieure $j$ permet d'accroître le bien-être si $k$ est suffisamment éloigné dans le temps, et donc étaler les prélèvements sur un nombre infini de périodes ne peut pas être une politique optimale.

Supposons maintenant les prélèvements effectués sur un nombre fini de périodes et soit $\overline{n}$ l'indice de la période ultime de prélèvements. S'il existait une période $j < \overline{n}$ au cours de laquelle les prélèvements sont nuls, en avançant les prélèvements de la période $\overline{n}$ à la période $j$ on augmenterait le bien-être de $(\theta^j - \theta^{\overline{n}})V(Q_{\overline{n}}) > 0$ et la répartition ne serait pas optimale. Les prélèvements sont donc positifs à toutes les périodes $n = 0,1,...,\overline{n}$ .

Il reste à démontrer que cette politique optimale dont on vient d'établir la principale caractéristique existe bien. Pour ce, partons des valeurs marginales $\lambda_0$.

Puisque la période 0 est celle où l'utilité marginale des prélèvements est la plus élevée, puisque cette utilité marginale est une fonction décroissante du montant du prélèvement et puisque la sous-période $\overline{\mathrm{T}} \subseteq [0,\Delta)$ est la sous-période au cours de laquelle $u_0^{'}(0^+,\tau)$ est maximum, alors le *maximum maximorum* de l'utilité marginale s'élève à $\overline{\lambda}_0 \equiv u_0^{'}(0^+,\overline{\tau}), \overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}}.$ Ce serait l'utilité marginale d'un stock $S_0$ infiniment petit que la société devrait consommer au cours de la sous-période $\overline{\mathrm{T}}$ de la période 0, en égalisant les prélèvements en chacune des dates de la sous-période.

Montrons maintenant que pour toute valeur marginale $\lambda_0 < \overline{\lambda}_0$, constante au cours du temps puisque les taux d'actualisation $i_n$ de toutes les périodes sont nuls, il existe un stock initial qui la justifie, stock qui tend vers $\infty$ si $\lambda_0$ tend vers 0.

La nullité des taux d'actualisation implique que soient égalisés les surplus marginaux à toutes les dates de toutes périodes auxquelles ils sont positifs. Pour tout $\lambda_0 < \overline{\lambda}_0$ il existe une période $\overline{n}(\lambda_0)$ au-delà de laquelle aucune partie du stock ne doit être allouée, toutes les périodes $n = 0,1, ..., \overline{n}(\lambda_0)$ devant s'en voir attribuer une part :

$$\overline{n}(\lambda_0) \equiv \max\left\{n \geq 0 : \theta^n u_0^{'}(0^+,\overline{\tau}) > \lambda_0, \overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}}\right\}.$$

Puisque $\theta < 1$, la fonction $\overline{n}(\lambda_0)$ est décroissante et telle que $\lim_{\lambda_0 \downarrow_0} \overline{n}(\lambda_0) = \infty.$ Une faible valeur de $\lambda_0$ reflète l'abondance de la ressource et plus la ressource est abondante, plus le nombre de périodes sur laquelle sa consommation doit être répartie est élevée.

Notons $Q_n(\lambda_0)$ la demande cumulée, somme des prélèvements optimaux, de la période $n$ :

$$Q_n(\lambda_0) \equiv \int_0^{\Delta} q_n^d(\lambda_0,\tau)d\tau$$

où $q_n^d(\lambda_0,\tau)$ est la solution de $\theta^n u_0'(q,\tau) = \lambda_0$.

La fonction $Q_n(\lambda_0)$ est nulle pour $\lambda_0 \geq \theta^n u_0'(0^+,\overline{\tau}), \overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}}$, et positive et décroissante pour $\lambda_0 < \theta^n u_0'(0^+,\overline{\tau})$, avec $\lim_{\lambda_0 \downarrow 0} Q_n(\lambda_0) = \int_0^{\Delta} \overline{q}(\tau)d\tau = \overline{Q}$.

Il est clair que la fonction $Q(\lambda_0) \equiv \sum_{k=0}^{\overline{n}(\lambda_0)} Q_n(\lambda_0)$, somme des prélèvements optimaux sur lesquels il faut prélever, est nulle si $\lambda_0 \geq \overline{\lambda}_0$ et décroissante si $\lambda_0 < \overline{\lambda}_0$ avec $\lim_{\lambda_0 \downarrow 0} Q(\lambda_0) = \infty$.

On conclut qu'à tout $S_0 < \infty$ correspond une valeur $\lambda_0^*$ de $\lambda_0$ pour laquelle la somme des prélèvements optimaux est égale au stock initialement disponible :

$$Q(\lambda_0^*) = S_0 \quad \text{et} \quad \overline{n}(\lambda_0^*) \text{ fini.}$$

Dans le cas d'une demande en régression, le problème de l'épuisement optimal du stock $S_0$ admet donc une solution, même si le taux d'actualisation est nul en permanence.

On trouvera à l'Annexe II une discussion de la robustesse de ces conclusions à d'autres spécifications de la décroissance de la demande.

## * Demande croissante

Soit maintenant $\theta > 1$. Supposons d'abord des prélèvements répartis sur un nombre fini de périodes et soit $\overline{n}$ l'indice de la dernière période de prélèvement. Alors la répartition peut être améliorée en transférant la consommation de l'une des périodes au cours desquelles elle est positive à n'importe quelle période d'indice supérieur à $\overline{n}$ au cours de laquelle elle est nulle. Soit $k < \overline{n}$ l'indice d'une période où les prélèvements sont positifs et $l > \overline{n}$ l'indice d'une période où ils sont nuls. La contribution au bien-être $W$ des prélèvements de la période $k$ s'élève à $\theta^k V_0(Q_k)$. En la transférant à la période $l$ l'accroissement de bien-être s'élève à $(\theta^l - \theta^k)V_0(Q_k) > 0$.

Considérons maintenant des prélèvements répartis sur un nombre infini de périodes. Alors comme dans le cas d'une demande décroissante, il existe une suite de périodes au cours desquelles les prélèvements sont positifs, décroissant d'une période de la suite à la suivante, et tendent vers 0. Soit $j$ et $k, j < k,$ les indices de deux périodes de cette suite et transférons les prélèvements de la période $j$ à la période $k$. La variation de bien-être s'élève à :

$$\theta^k (V_0(Q_j + Q_k) - V_0(Q_k)) - \theta^j V_0(Q_k).$$

Puisque $Q_k$ tend vers 0 alors :

$$\lim_{k\uparrow\infty} \left\{\theta^k (V_0(Q_j + Q_k) - V_0(Q_k)) - \theta^j V_0(Q_j)\right\}$$

$$= V_0(Q_j) \lim_{k\uparrow\infty} \theta^k - \theta^j V_0(Q_j) = +\infty.$$

Quelle que soit la répartition de $S_0$ il existe une autre répartition qui permet d'accroitre le bien-être. Il n'existe donc pas de répartition optimale.

On remarquera que l'argument est différent de celui mis en avant pour le cas d'une demande stationnaire. Ici il faut indéfiniment reculer la consommation du stock $S_0$ pour améliorer $W$. Ce stock $S_0$ est un trésor qui prend de la valeur, auquel il ne faut pas toucher. Dans le cas d'une demande stationnaire, l'argument est au contraire qu'il faut étaler la consommation sur le plus grand nombre de périodes, et ce nombre n'est pas limité.

Une autre façon d'appréhender les raisons pour lesquelles il n'existe pas de politique optimale consiste à montrer que toute valeur marginale $\lambda_0$ ne pourrait être justifiée que par un stock $S_0$ infini. Pour tout $\lambda_0 > 0$, il existe une période $\underline{n}$ en deçà de laquelle les prélèvements devraient être nuls et pour laquelle à toutes les périodes qui la suivent, les prélèvements devraient être positifs :

$$\underline{n} \equiv \min\left\{n \geq 0 : \theta^n u_0^{'}(0^+, \overline{\tau}) > \lambda_0 \, , \overline{\tau} \in \mathrm{T}\right\}.$$

Comme dans le cas d'une demande décroissante notons $Q_n(\lambda_0)$ la somme des prélèvements optimaux de la période $n$ et $Q(\lambda_0)$ la somme sur toutes les périodes des prélèvements optimaux : $Q(\lambda_0) = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n} Q_k(\lambda_0).$ Maintenant remarquons que $\lim_{n\uparrow\infty} Q_n(\lambda_0) = \overline{Q}.$ La raison en est qu'à toute période $n \geq \underline{n}$, les prélèvements de toute date $\tau$ de la période doivent satisfaire la condition :

$$\theta^k u_0^{'}(q(\tau), \tau) = \lambda_0 \quad \Rightarrow \quad u_0^{'}(q(\tau), \tau) = \lambda_0 / \theta^k \ , \ \tau \in [0, \Delta).$$

Donc si $q_n(\tau, \lambda_0)$ est la solution, alors :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \lambda_0 / \theta^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\uparrow\infty} q_n(\tau, \lambda_0) = \overline{q}(\tau) \ , \ \tau \in [0, \Delta).$$

On conclut que, pour tout $\lambda_0$, $Q(\lambda_0)=\infty$, de sorte que l'équation $Q(\lambda_0)=S_0$ n'a pas de solution.

## * Croissance de la demande et actualisation

Il ne suffit pas que le taux d'actualisation soit positif pour que le problème de l'allocation optimale de $S_0$ admette une solution. Il faut aussi que la demande ne croisse pas trop vite. Modifions l'exemple précédent en supposant un taux d'actualisation positif constant $i$ et une fonction de surplus qui, de période en période, évolue comme suit :

$$u_n\left(q(\tau),\tau\right)=e^{j(n\Delta+\tau)}u_0(q(\tau),\tau), \tau\in[0,\Delta) \text{ et } n\geq 0 .$$

Le problème de l'allocation optimale admet, ou pas, une solution selon que le taux de croissance du surplus $j$ est strictement inférieur, ou supérieur ou égal au taux d'actualisation. En effet le transfert du profil des consommations de la période $m$ à la période $n+1$ lorsque les consommations sont circonscrites aux périodes $m$ à $n$, $m<n$, induit maintenant une variation de $W$, la somme des surplus actualisés, égale à $e^{(j-i)(n+1-m)\Delta}\int_0^\Delta u_0(q_m(\tau),\tau)e^{(j-i)\tau}d\tau$, positive si le taux de croissance du surplus $j$ est supérieur au taux d'actualisation $i$. Dans ce cas, mieux vaut donc reculer la consommation. Si $j=i$ alors la situation est similaire à celle dans laquelle le taux d'actualisation est nul et la fonction de surplus est stationnaire. Pour démontrer que le problème de l'allocation optimale de $S_0$ n'a pas de solution, il faut alors recourir à l'argument d'étalement indéfini mis en avant dans ce cas.

A la Sous-section 3.2 ci-dessus, c'est l'ajout à l'hypothèse d'un taux d'actualisation strictement positif, d'une hypothèse d'évolution bornée supérieurement de la fonction de surplus marginal qui a permis de résoudre le problème. Dans ce cas, à long terme, l'effet dépresseur de l'actualisation sur les valeurs actualisées en $t=0$ des surplus à venir dans un futur suffisamment lointain est toujours plus fort que l'effet de croissance éventuelle de la fonction de surplus instantané. Un modèle du type de ceux des exemples précédents et qui satisferait les hypothèses posées à la Sous-section 3.2 serait le modèle d'évolution des surplus suivant :

$$u_n(q(\tau),\tau)=h(n\Delta+\tau)u_0(q(\tau),\tau),\ \tau\in[0,\Delta),\ n\geq 0$$

où la fonction $h(n\Delta+\tau)$ est bornée supérieurement :

$$h(n\Delta+\tau)\leq\overline{h}<\infty,\ \tau\in[0,\Delta) \text{ et } n\geq 0 .$$

On voit ainsi que l'arbitrage entre des besoins à satisfaire peut-être plus forts dans le futur que ceux d'aujourd'hui et une préférence pour le présent élevée qui déprécie la valeur des prélèvements futurs est la clef du problème de l'allocation de la ressource.

## 4. Déperdition du stock

On a admis jusqu'ici que le stock $S_0$, ou ce qui en reste au fur et à mesure que son exploitation le réduit, pouvait être maintenu en l'état. En fait ce type de stock subit une érosion naturelle qu'il faut prendre en compte et qui conduit à amender quelque peu les conclusions de la section précédente.

### 4.1 Mesure de la déperdition

Les stocks d'eau dont on utilise la force motrice pour produire de l'électricité sont des stocks de surface. Pour d'autres usages au contraire, en particulier pour l'irrigation des cultures, les stocks souterrains sont également mis à contribution.

Les stocks de surface subissent une déperdition régulière par évaporation, plus ou moins intense selon la configuration du réservoir, en particulier sa surface ramenée à son volume, et selon le régime climatique (ensoleillement, température, régime des vents) auquel il est soumis. Cette déperdition est non négligeable sous certaines latitudes.[10] Il est également possible qu'une partie du stock se perde par infiltration.

La décroissance du stock même en l'absence de tout prélèvement joue un rôle analogue à celui de l'actualisation dans la détermination de la politique optimale mais par un autre canal. L'actualisation a pour effet de réduire la valeur actualisée du surplus permis par la consommation lorsqu'on recule cette consommation à une date plus lointaine. Le même recul a pour effet de réduire la quantité que l'on pourra consommer dans le cas de l'évaporation et donc aussi de réduire la valeur actualisée de cette consommation, y compris lorsque le taux d'actualisation est nul.

Soit $\alpha$ le taux proportionnel de déperdition du stock par évaporation, taux qui dépend généralement du stock lui-même, $\alpha = \alpha(S)$, de sorte que le volume d'eau ainsi soustrait à l'instant $t$ a pour expression $\alpha(S(t))S(t)$. La fonction $\alpha(S)$ est propre à chaque stock. Pour un même stock *S*, $\alpha(S)$ peut-être plus ou moins élevé selon la configuration du stock en question et le régime climatique de la région dans laquelle il est situé. Elle n'est pas

[10] Pour le lac Nasser (barrage d'Assouan) l'évaporation est estimée à 14 km$^3$ par an, soit 11% du volume d'eau retenue, (Musy et Higy, 2004, p. 133). Sur les méthodes de mesure de l'évaporation, voir Vachala (2008).

nécessairement croissante. Pour un réservoir en forme de parallélépipède rectangle par exemple,[11] lorsque le stock d'eau diminue la surface supérieure qui est au contact de l'air reste constante et l'énergie issue du rayonnement solaire reçue par unité de volume s'accroit. C'est donc également vrai du taux proportionnel de déperdition et $\alpha(S)$ est alors une fonction décroissante. Mais on ne peut rien dire a priori du flux d'évaporation en fonction du volume :

$$\frac{d(\alpha(S).S)}{dS} = \alpha'(S)S + \alpha(S).$$

Le premier terme du membre droit est négatif et le second est positif.

## 4.2 Déperdition et prélèvement

Supposons, pour simplifier, un taux proportionnel de déperdition constant, $\alpha(S) = \alpha,\ S \geq 0.$ La variation instantanée de $S(t)$ est maintenant égale au prélèvement $q(t)$ générateur de surplus, augmenté de la déperdition naturelle $\alpha S(t)$. Le problème de la détermination de la politique d'épuisement optimal du stock $S_0$ admet la formulation (P.4) suivante dans laquelle le taux d'actualisation $i$ est posé constant :

$$\text{(P.4)} \quad \underset{\{q(t),\, t\geq 0\}}{Max} \quad \int_0^{\infty} u(q(t),t)e^{-it}dt \tag{32}$$

sous les contraintes :

$$\dot{S}(t) = -(q(t) + \alpha S(t)), \quad S(0) = S_0 \quad , \quad S(t) \geq 0\,,\ q(t) \geq 0 \tag{33}$$

Le hamiltonien en valeur courante $H(t)$ et la lagrangien $L(t)$, lui aussi en valeur courante, ont alors pour expression :

$$H(t) = u\big(q(t),t\big) - \lambda(t)(q(t) + \alpha S(t)) \quad \text{et} \quad L(t) = H(t) + \upsilon(t)S(t) + \gamma(t)q(t)$$

La condition de premier ordre garde la même forme que dans les sections précédentes:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(q(t),t) = \lambda(t) - \gamma(t), \tag{34}$$

[11] Ce n'est évidemment pas la forme la plus fréquente des réservoirs ou des lacs de retenue à partir desquels l'hydroélectricité est produite.

où $\gamma(t) \geq 0$ et $\gamma(t)q(t) = 0.$

Le seul changement, mais il est essentiel, est celui de la condition qui gouverne la dynamique de $\lambda(t)$ qui devient maintenant :

$$\dot{\lambda}(t) = i\lambda(t) - \frac{\partial L}{\partial S(t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = (i+\alpha)\lambda(t) - \upsilon(t) \tag{35}$$

couplée à la condition d'écarts complémentaires :

$$\upsilon(t) \geq 0\,, S(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \upsilon(t)S(t) = 0. \tag{36}$$

Il en résulte que si $\overline{t}$ est la date à laquelle le stock $S_0$ est épuisé :

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{(i+\alpha)t} \quad , \quad t \leq \overline{t} \tag{37}$$

où, comme dans les modèles précédents, $\lambda_0 \equiv \lambda(0).$

La signification des relations (34) et (37) est la suivante. Pour que l'objectif (32) soit atteint, il est nécessaire que la répartition du stock initialement disponible entre les consommations des différentes dates soit telle que les contributions marginales à toutes les dates auxquelles les consommations sont positives, soient les mêmes en valeurs actualisées à la date $t = 0.$ Si en $t = 0$ la valeur marginale d'une unité consommée à cette date est égale à $\lambda_0$, il faut que la valeur marginale d'une unité disponible initialement mais consommée plus tard en $t > 0$ et à cette date réduite par déperdition au volume $e^{-\alpha t}$, soit, en valeur courante égale à $\lambda(t) = \lambda_0 e^{(i+\alpha)t}$. Alors la valeur courante de ces $e^{-\alpha t}$ unités qui restent de l'unité initialement disponible, s'élève à $e^{(i+\alpha)t}\lambda_0 e^{-\alpha t} = e^{it}\lambda_0$, d'où en $t = 0$ une valeur $\lambda_0$ de l'unité d'eau initialement en stock, la même que celle de l'unité qui est consommée en $t = 0$.

La date $\overline{t}$ est la date pour laquelle $\tilde{S}(t,\lambda_0) = 0,$ où $\tilde{S}(t,\lambda_0)$ est le stock encore disponible à l'instant $t$ lorsque la politique de prélèvements est la politique $q(t) = q^d(\lambda_0 e^{(i+\alpha)t}, t)$ induite par la valeur initiale $\lambda_0$ de la variable duale $\lambda$ :

$$\tilde{S}(t,\lambda_0) \equiv S_0 - \int_0^t (q^d(\lambda_0 e^{(i+\alpha)\tau}, \tau) + \alpha \tilde{S}(\tau,\lambda_0))d\tau.$$

L'équation $\tilde{S}(t,\lambda_0) = 0$ est ici la forme prise par l'égalité de la consommation cumulée et du stock finalement consommable compte tenu du fait qu'à chaque instant $\tau$ la partie du stock encore disponible subit une déperdition indépendante du retrait pour consommation au même instant $q^d(\lambda_0 e^{(i+\alpha)\tau},\tau)$. Le stock finalement consommé est donc inférieur à $S_0$ et dépend de $\alpha$.

On remarquera enfin que le problème de la politique optimale de prélèvements admet ici une solution même si $i=0$ pourvu que $u'(0^+,t)$ soit bornée supérieurement. La dynamique de la variable duale $\lambda$ est alors donnée par $\lambda(t)=\lambda_0 e^{\alpha t}$ et les développements des sections précédentes peuvent être reconduits en substituant $\alpha$ à $i$.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi les principes théoriques de la gestion optimale d'une ressource de taille finie sur une durée finie quand le temps est une variable continue. La règle d'arbitrage présidant à cette allocation est la même que celle du cadre en temps discret : à toutes les dates où la consommation est inférieure à son seuil de saturation, il faut répartir la ressource de telle façon que toutes les utilités marginales actualisées soient égales. En effet, si tel n'était pas le cas, on pourrait améliorer la performance en réduisant la consommation des dates où l'utilité marginale a une faible valeur actualisée pour transférer la ressource ainsi libérée vers les dates où l'utilité marginale a une forte valeur actualisée.

Nous avons aussi étudié la façon d'adapter cette règle selon le volume de ressource disponible, ce qui suppose une connaissance ou une évaluation de la ressource qu'il faut réserver pour un usage postérieur à la période concernée. Les résultats obtenus s'appliquent à tout stock fini de ressource, qu'il s'agisse de pétrole, de gaz ou d'eau. Pour les deux premiers, la date de fin d'exploitation (et même la date de début) peut être traitée comme une variable de décision. Nous n'avons pas envisagé cette possibilité ici car les réservoirs d'eau répondent à des contraintes temporelles de remplissage et à des règlements d'usage qui laisse peu de liberté aux gestionnaires pour ce qui est de l'horizon de l'exploitation. Nous avons préféré insister sur l'importance de l'arbitrage entre présent et futur en montrant le rôle joué par les prévisions en matière d'évolution de la demande, par le taux d'escompte et par les déperditions naturelles de la ressource.

Le prochain chapitre introduira des dimensions plus spécifiques à la gestion des réservoirs d'eau, notamment le remplissage par des apports naturels, les contraintes de turbinage et la gestion des barrages situés en cascade le long d'une même vallée.

## Référence bibliographiques


Albouy, M. (1972). « La régulation économique dans l'entreprise. Tome 2 : La régulation dynamique », Dunod, Paris.

Caputo, M. R. (2005). "Foundations of dynamic economic analysis. Optimal control theory and applications", Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

Kamien, M. and N. Schwartz (1991). "Dynamic optimization". Second edition, North-Holland, Amsterdam. Réimpression. Dover Publications, 2012.

Léonard, D. and N. Van Long (1992). "Optimal control theory and static optimization in economics". Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

Musy A. et C. Higy (2004), "Hydrologie: Une science de la nature", PPUR presses polytechniques

Rawls J. (1971), "A theory of justice", Harvard University Press, Cambridge (MA). Traduction française "Théorie de la justice", Seuil, Paris (1987).

Seierstad A. and K. Sydsaeter (1987). "Optimal control theory with economic applications", North-Holland, Amsterdam.

Solow R.M. (1974), "Intergenerational equity and exhaustible resources", Review of Economic Studies Symposium on the Economics of Natural Resources, p. 29-45

Vachala S. (2008), « Évaporation sur les retenues EDF du Sud de la France », Électricité De France, Division Technique Générale Service ressources en eau, Grenoble.
http://www.sisyphe.upmc.fr/~m2hh/arch/memoires2008/Vachala.pdf

# Annexe I. Equité intergénérationnelle et critère max-min

« *La force de la communauté se mesure au bien-être du plus faible de ses membres* »

dernier alinéa du préambule de la Constitution fédérale de la Confédération suisse

Les développements du paragraphe 3.3.1 et le résultat auquel ils conduisent peuvent être vus comme la réponse au problème d'équité posé par Rawls (1971) et à l'application du critère qu'il propose au problème de l'équité entre générations. On doit à Solow (1974) la première analyse des conséquences pour l'utilisation équitable et efficace d'une ressource non renouvelable, de la mise en œuvre de ce critère.

Considérons le modèle stationnaire du paragraphe 3.3.1 comme le modèle d'une suite de générations d'usagers d'effectifs constants, chaque génération vivant une seule période, les préférences en matière de répartition de la consommation pendant laquelle elle est présente étant les mêmes de génération en génération.

Soit $S_0$ le stock d'une ressource non renouvelable qu'il s'agit de répartir entre les générations $n = 0,1,2,...$ et $Q_n$ la consommation allouée à la génération $n$. Supposons que le bien-être qu'elle en retire, noté $U(Q_n)$, soit une fonction croissante de la consommation dont elle bénéficie.

Le critère de Rawls pose que pour comparer deux suites de consommations $Q = \{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $Q' = \{Q_n^{'}\}_{n=0}^{\infty}$, on doit préférer la suite dans laquelle la génération la moins bien pourvue de chaque suite est la mieux pourvue des deux. Soit $\underline{n}$ une génération la moins bien pourvue de la suite $Q$ et $\underline{n}'$ une génération la moins bien pourvue de la suite $Q'$ :

$$U(Q_{\underline{n}}) \leq U(Q_n) \quad \text{et} \quad U(Q_{\underline{n}'}^{'}) \leq U(Q_n^{'}) \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

Alors $Q$ est strictement préférable à $Q'$ si et seulement si $U(Q_{\underline{n}}) > U(Q_{\underline{n}'}^{'})$, et les deux sont équivalentes si et seulement si $U(Q_{\underline{n}}) = U(Q_{\underline{n}'}^{'})$.

La première conséquence de l'application de ce critère est qu'il faut utiliser la totalité du stock disponible si $U(.)$ est une fonction croissante, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n = S_0$. Une seconde conséquence est qu'il faut formuler comme suit le problème de la détermination de la « meilleure » suite de consommations :

$$\sup_{Q \in \mathsf{F}} \left\{ \inf \left\{ Q_n \in Q \, , n \geq 0 \right\} \right\} \tag{I.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n = S_0 \tag{I.2}$$

où $\mathsf{F}$ est l'ensemble des suites de nombres réels non négatifs.

De toute suite $Q$ satisfaisant la contrainte on peut extraire une sous-suite qui converge d'après le théorème de Weirstrass, et nécessairement vers 0 sinon la somme de ses éléments serait supérieure à n'importe quel nombre fini et serait en particulier supérieure à $S_0$.

Il faut conclure que le critère de Rawls ne permet d'éliciter aucune des suites qui satisfont la contrainte de faisabilité (I.2). En effet, le critère de Rawls consiste implicitement à poser un taux d'intérêt nul, de sorte que, avec une fonction d'utilité stationnaire, toutes les générations pèsent d'un même poids dans la fonction d'objectif intertemporelle. Dès lors, quelle que soit la façon dont sera allouée la ressource, la génération qui recevra le moins aura au mieux 0, soit dans un temps fini, soit dans un temps infiniment reculé.

## Annexe II : Autres spécifications de la décroissance de la demande

**II.1** : Dans la spécification qui a servi de support aux développements du paragraphe 3.3.2 on a supposé que le surplus permis par un même prélèvement $q(\tau)$ effectué à la même date $\tau$ dans chacune des périodes successives était réduit d'un même pourcentage d'une période à la suivante :

$$u_n(q(\tau),\tau) = \theta^n u_0(q(\tau),\tau), 0 < \theta < 1, \tau \in [0,1), n = 0,1,2,.. \qquad \text{(II.1)}$$

d'où : $u'_n(q(\tau),\tau) = \theta^n u'_0(q(\tau),\tau)$ et une évolution de la demande inverse à la date $\tau \in [0,\Delta)$ d'une période à la suivante du type illustré à la figure ci-dessous.

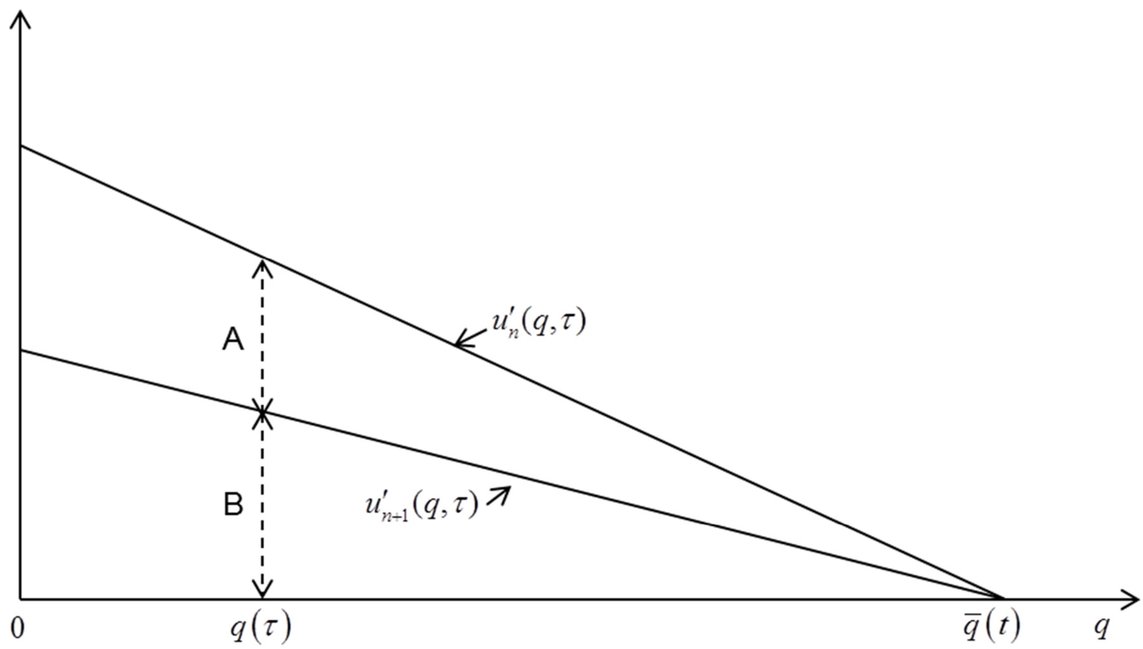


Figure II.1: Evolution de la fonction inverse de demande à la date $\tau$ sous l'hypothèse (II.1)

Sur la Figure II.1 pour tout $q(\tau) < \overline{q}(\tau)$ : $B/(A+B) = \theta < 1$

Il est légitime de se demander dans quelle mesure les résultats du paragraphe 3.3.2 dépendent ou non de cette spécification particulière qui postule notamment, pour toute date $\tau \in [0,\Delta)$, l'invariance de la demande maximale $\overline{q}(\tau)$ de période en période, et la constance du taux de déperdition $\theta$ du surplus et du surplus marginal.

Une généralisation immédiate dont il est évident qu'elle n'affecte pas les conclusions consiste à lever la constance du taux de déperdition. Posons que :

$$u_n(q(\tau),\tau) = \theta(n)u_0(q(\tau),\tau), \tau \in [0,\Delta), \tag{II.2}$$

où la fonction $\theta(n)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\theta(n) < 1 \ , \ \ \theta(n+1) < \theta(n), n = 1,2,.., \text{et } \lim_{n\uparrow\infty} \theta(n) = 0 \tag{II.3}$$

Le taux de déperdition de la période $n$ à la suivante d'élève maintenant à $\theta(n+1)/\theta(n) < 1$ et fluctue. Mais cette spécification préserve l'invariance de la demande maximale $\overline{q}(\tau)$. Elle préserve aussi la disparition du marché à la limite, car dans les deux cas :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \theta^n = 0 = \lim_{n\uparrow\infty} \theta(n)$$

Supposons maintenant que le comportement limite de $\theta(n)$ n'implique pas la disparition du marché : $\lim_{n\uparrow\infty} \theta(n) = \underline{\theta} > 0$, les autres propriétés de $\theta(n)$ étant conservées. Sur la Figure II.2 on a représenté pour une date $\tau \in [0,\Delta)$ la fonction inverse de demande de cette date $\tau$ à la période 0, à une période $n > 0$ et à la limite lorsque $n \to \infty$.

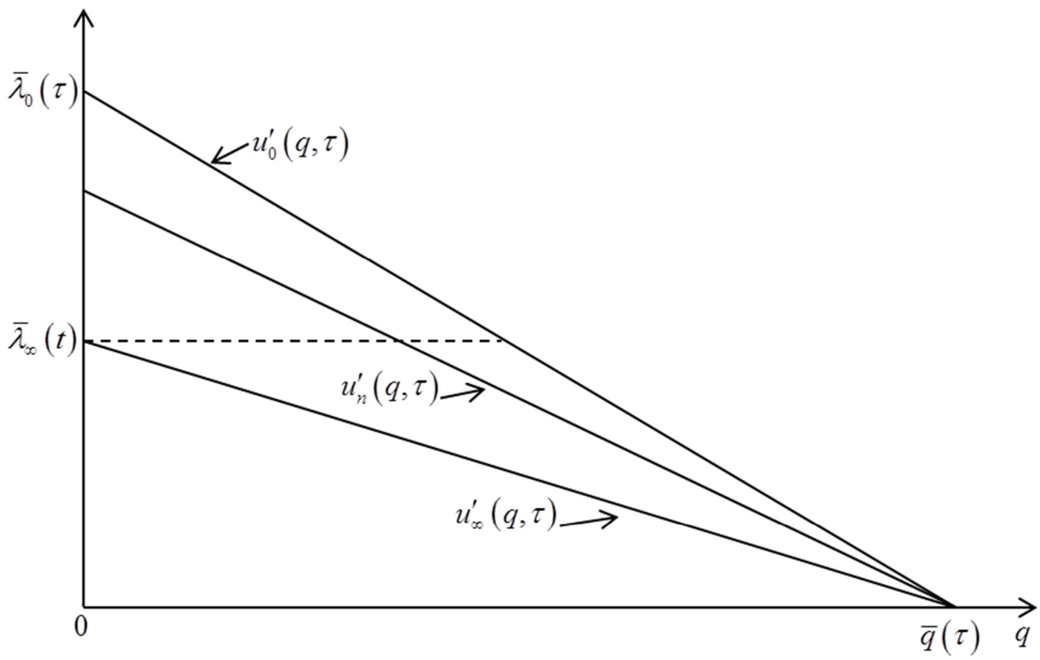


Figure II.2: Evolution de la fonction inverse de demande à la date $\tau$ sous l'hypothèse $\underline{\theta} > 0$

Il n'est plus vrai maintenant que pour tout $\lambda_0 < \overline{\lambda}_0(\tau) \equiv u_0'(0^+,\tau)$ la demande à satisfaire à la date $\tau$ devrait être concentrée sur un nombre fini de premières périodes lorsqu'il faut prélever à cette date. C'est vrai pour des $\lambda_0 \in \left(\overline{\lambda}_\infty(\tau), \overline{\lambda}_0(\tau)\right)$ où $\overline{\lambda}_\infty(\tau) \equiv \lim_{n\uparrow\infty} \theta(n) u_0'(0^+,\tau)$. Mais pour $\lambda_0 < \overline{\lambda}_\infty(\tau)$ il faudrait opérer des prélèvements à la date $\tau$ de toutes les périodes.

Un second problème apparait, induit par le précédent, pour les $\lambda_0 < \overline{\lambda}_\infty$ où $\overline{\lambda}_\infty = \lim_{n\uparrow\infty} \overline{\lambda}_0(\overline{\tau})$ ,$\overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}}$. Dans ce cas en effet, si $i_n = 0$ , $n = 0,1,..$ alors, en notant $Q_n(\lambda_0)$, la somme des demandes de la période n, $Q_n(\lambda_0) = \int_0^\Delta q_n^d(\lambda_0,\tau)\, d\tau$, on a :

$\lim_{n\uparrow\infty} Q_n(\lambda_0) > 0$, donc $\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n} Q_k(\lambda_0) = \infty$ et $\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n} V_0(Q_k(\lambda_0)) = \infty$.

Certes de tels prélèvements ne sont pas réalisables. Il n'en reste pas moins que se pose le problème théorique de la comparaison de niveaux infinis de bien-être. Une solution consiste à prendre comme critère de classement le critère dit *overtaking criterium* selon lequel la suite $\{Q_n(\lambda_0')\}_{n=1}^{\infty}$ est préférable à la suite $\{Q_n(\lambda_0'')\}_{n=0}^{\infty}$ s'il existe $n^*$ tel que, pour tout $n \geq n^*$ : $\sum_{k=0}^{n} V_0\left(Q_k(\lambda_0')\right) \geq \sum_{k=0}^{n} V_0\left(Q_k(\lambda_0'')\right)$.

Cependant, nonobstant ces difficultés le problème admet bien une solution $\lambda_0^*, \overline{\lambda}_\infty < \lambda_0^* < \overline{\lambda}_0$, où $\overline{\lambda}_0 \equiv u_0'\left(0^+,\overline{\tau}\right), \overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}}$, pour laquelle il existe $\overline{n}\left(\lambda_0^*\right)$, $\overline{n}\left(\lambda_0^*\right) < \infty$, tel que : $\sum_{n=0}^{\overline{n}(\lambda_0^*)} Q_n\left(\lambda_0^*\right) = S_0$.

**II.2.** L'autre cas polaire consiste à poser que pour tout $\tau \in [0,\Delta)$ l'intervalle des prix pour lesquels la demande est positive ne varie pas, mais que, pour tout prix dans cet intervalle la demande est réduite d'un certain pourcentage. Une récurrence de ce type est la suivante :

$$u_n'\left(\theta(n)q(\tau),\tau\right) = u_0'\left(q(\tau),\tau\right),\ \tau \in [0,\Delta) \qquad \text{(II.4)}$$

où la suite $\theta(n), n = 1,2,...$ vérifie les conditions (II.3). La demande maximale de la date $\tau$ n'est plus maintenant invariante. Notons la $\overline{q}_n(\tau)$. Alors :

$$\overline{q}_n(\tau) = \theta(n)\overline{q}_0(\tau),\ \tau \in [0,\Delta) \text{ et } n = 1,2,... \qquad \text{(II.5)}$$

L'évolution de la fonction inverse de demande d'une période $n$ à la suivante est illustrée à la Figure II.3.

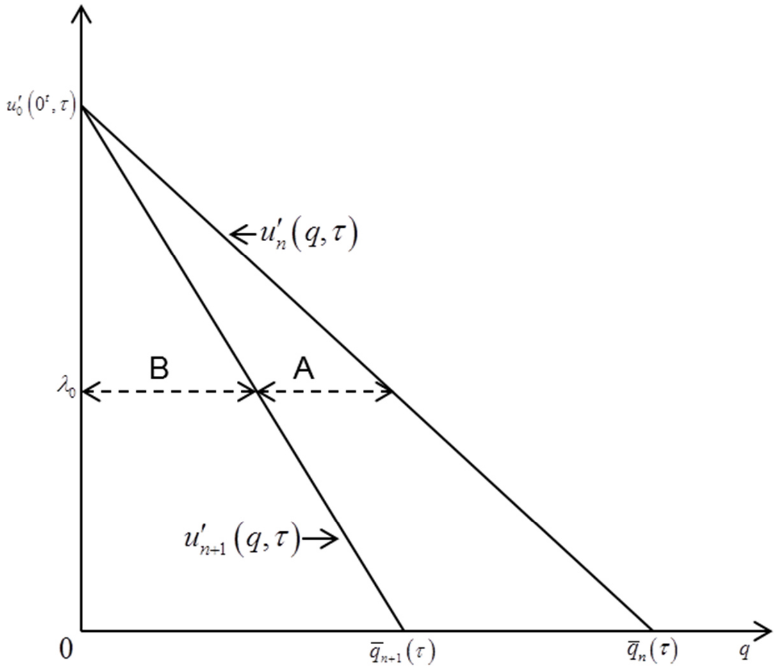


Figure II.3: Evolution de la fonction inverse de demande à la date $\tau$ sous l'hypothèse (II.4)

Sur la Figure II.3 , pour un $\lambda_0 < u_0'\left(0^+,\tau\right)$, la demande évolue comme suit :

$$\frac{q_{n+1}^d\left(\lambda_{0,}\tau\right)}{q_n^d\left(\lambda_{0,}\tau\right)} = \frac{B}{A+B} = \frac{\theta(n+1)}{\theta(n)} < 1$$

La conclusion selon laquelle la politique optimale consiste à opérer des prélèvements sur un nombre fini de premières périodes ne tient plus puisque, sous l'hypothèse (II.4), $u_n'\left(0^+,\overline{\tau}\right) = u_0'(0^+,\overline{\tau})$, $\overline{\tau} \in \overline{\mathrm{T}}$, $n = 1,2,...$ Est-ce à dire que le problème de la répartition optimale des prélèvements n'admet pas de solution ? Non. Notons $\overline{Q}_n$ la somme des prélèvements de saturation de la période $n : \overline{Q}_n \equiv \int_0^\Lambda \overline{q}_n(\tau)d\tau$, et distinguons selon que $\overline{Q} \equiv \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{Q}_k$ est fini ou infini.

Si $\overline{Q}$ est fini, alors :

- soit $S_0 < \bar{Q}$ et il existe une valeur $\lambda_0^* \in \left(0, u_0'\left(0^+, \bar{\tau}\right)\right)$ pour laquelle la somme des prélèvements optimaux est égale à $S_0$
- soit $S_0 \geq \bar{Q}$ et alors il est possible de saturer les besoins de toutes les dates à toutes les périodes : $\lambda_0^* = 0$

Si $\bar{Q}$ est infini alors il existe nécessairement une valeur $\lambda_0^* \in \left(0, u_0'(0^+, \bar{\tau}\right)$ qui justifie des prélèvements optimaux dont le cumul est égal à $S_0$.

**II.3** Les types de régression de la demande de période en période envisagées aux paragraphes précédents ont ceci de particulier qu'ils postulent chacun la permanence d'une des caractéristiques de la demande de la période initiale : dans la spécification du paragraphe II.1, les demandes de saturation $\bar{q}(\tau), \tau \in [0, \Delta)$ sont constantes mais les plus hauts niveaux des dispositions marginales à payer régressent, dans la spécification du paragraphe II.2 le maximum des dispositions marginales à payer de toutes les dates reste constant, $u_n'\left(0^+, \tau\right) = u_0'\left(0^+, \tau\right), \tau \in [0, \Delta)$, pour tout $n \geq 1$ mais la demande de saturation régresse. Cependant il est clair que la consommation de saturation et le surplus marginal maximal peuvent aussi régresser simultanément comme illustré à la Figure II.4.

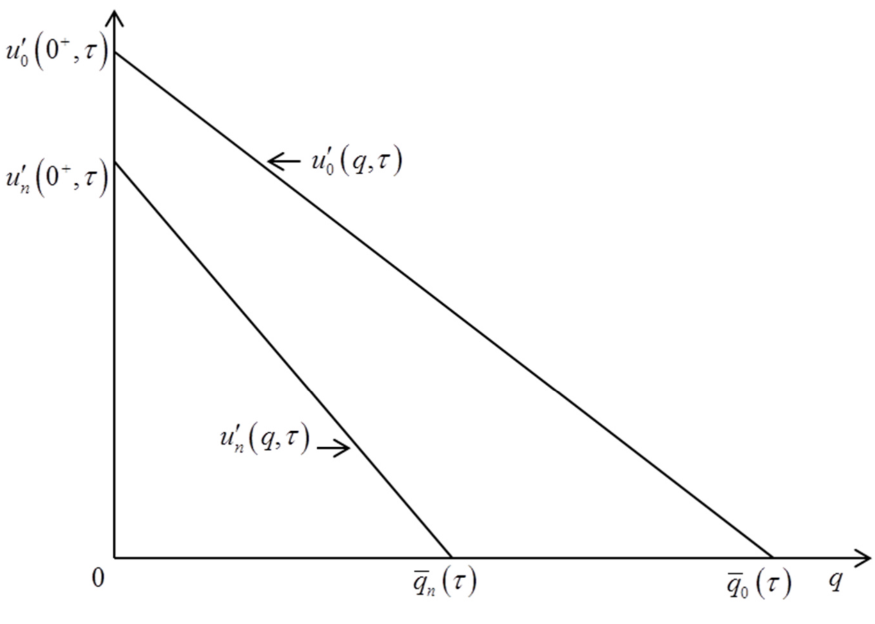


Figure II.4: Contractions simultanées de la consommation de saturation et de la disposition marginale à payer maximale de la date $\tau$

Pour formaliser cette régression entre la période 0 et la période $n$, il faut spécifier d'une part les taux de régression des consommations de saturation et d'autre part les taux de régression des surplus marginaux pour les niveaux de consommation inférieures.

Soit :

$$\left\{\left(\bar{\theta}(\tau);\gamma_n(q,\tau), q\in\left[0,\bar{\theta}_n(\tau)\bar{q}_0(\tau)\right) \text{ et } \tau\in[0,\Delta)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

une spécification de cette régression :

$\forall\tau\in[0,\Delta)$ ,

$$u_n'(q,\tau)=\begin{cases}\gamma_n(q,\tau)u_0'(q,\tau), & 0\le q<\bar{q}_n(\tau)\\ 0, & \bar{q}_n(\tau)\le q\end{cases}$$

où $\bar{q}_n(\tau)\equiv\bar{\theta}_n(\tau)\bar{q}_0(\tau)$

On remarquera que pour préserver la décroissance de la demande en fonction du prix à chaque date $\tau$, il faut que, pour tout $\tau\in[0,\Delta)$ et tout $q\in\left(0,\bar{q}_n(\tau)\right)$ :

$$u_n''(q,\tau)\equiv\gamma_n'(q,\tau)u_0'(q,\tau)+\gamma_n(q,\tau)u_0''(q,\tau)<0,$$

où $u_n''(q,\tau)\equiv\partial u'(q,t)/\partial q$ et $\gamma_n'(q,\tau)\equiv\partial\gamma_n(q,\tau)/\partial q$. De plus, si $\bar{\theta}_n(n)<1$, il faut aussi que :

$$\lim_{q\uparrow\bar{q}_n(\tau)}u_n'(q,\tau)=\lim_{q\uparrow\bar{q}_n(\tau)}\gamma_n(q,\tau)u_0'(q,\tau)=0$$

et puisqu'alors $u_0'\left(\bar{q}_n(\tau),\tau\right)>0$ car $\bar{q}_n(\tau)<\bar{q}_0(\tau)$, il est nécessaire que :

$$\lim_{q\uparrow\bar{q}_n(\tau)}\gamma_n(q,\tau)=0$$

Notons $\overline{\mathrm{T}}_{nq}$ l'ensemble des dates de la période *n* auxquelles $\bar{q}_n(\tau)$ est maximum et $\overline{\mathrm{T}}_{nu}$ l'ensemble des dates auxquelles $u_n'(0^+,\tau)$ est maximum, ensembles qui ici dépendent de la période *n* considérée :

$$\tau\in\overline{\mathrm{T}}_{nq}\Rightarrow\bar{q}_n(\tau)\ge\bar{q}_n(\tau'),\ \tau'\in[0,\Delta)$$

$$\tau\in\mathrm{T}_{nu}\Rightarrow u_n'(0^+,\tau)\ge u_n'(0^+,\tau'),\ \tau'\in[0,\Delta)$$

On dira que la demande est en régression permanente :

- si, $\forall n \geq 0$ et $\forall \tau \in [0, \Delta)$ :
$$\overline{\theta}_{n+1}(\tau) \leq \overline{\theta}_n(\tau) \text{ et } \gamma_{n+1}(q,\tau) \leq \gamma_n(q,\tau), q \in [0, \overline{q}_n(\tau))$$

et

- s'il existe $n^* < \infty$, tel que ces inégalités sont strictes pour tout $n \geq n^*$

Considérons ce type de régression. Soit $\overline{\lambda}_0$ la plus forte valeur marginale possible, $\overline{\lambda}_0 \equiv u_0'(0^+, \overline{\tau}_{0u})$, $\overline{\tau}_{0u} \in \overline{\mathrm{T}}_{0u}$, et les valeurs limite suivantes : $\overline{\lambda}_\infty \equiv \lim_{n\uparrow\infty} \gamma_n(0, \overline{\tau}) u_0'(0^+, \overline{\tau}_{nu})$, $\overline{\tau}_{nu} \in \overline{\mathrm{T}}_{nu}$, et $\overline{q}_\infty \equiv \lim_{n\uparrow\infty} \overline{q}(\overline{\tau}_{nq})$, $\overline{\tau}_{nq} \in \overline{\mathrm{T}}_{nq}$. Chacune de ces valeurs limite peut être soit positive, soit nulle, indépendamment l'une de l'autre. Les cas dans lesquels, soit $\overline{\lambda}_\infty = 0$, soit $\overline{q}_\infty = 0$, sont des cas de disparition de la demande à long terme, même si pour le premier $\overline{q}_\infty > 0$ et pour le second $\overline{\lambda}_\infty > 0$. Seuls diffèrent les processus de disparition. Lorsque $\overline{\lambda}_\infty = 0$, les plus hautes dispositions marginales à payer tendent vers 0 et donc a fortiori les plus faibles, de sorte que le marché s'évanouit parce qu'à long terme aucun usager n'est prêt à payer quoi que ce soit. Lorsque $\overline{q}_\infty = 0$, la taille maximale du marché tend vers 0 de sorte que le marché s'évanouit parce qu'à long terme l'ensemble des usagers et/ou clients pour lesquels le bien a quelque valeur tend vers 0. L'analyse du cas $\overline{\lambda}_\infty > 0$ est similaire à l'analyse du cas $\theta(n) \to 0$ menée au paragraphe II.1 ci-dessus, quelle que soit la valeur $\overline{q}_\infty$. Celle du cas $\overline{\lambda}_\infty > 0$ est similaire à celle menée au paragraphe II.2, la conclusion dépendant du fait que $\overline{Q} = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{Q}_k$ où $\overline{Q}_k = \int_0^\Delta \overline{q}_k(\tau) d\tau$, est fini ou non, et si $\overline{Q}$ est fini, du fait que $S_0$ est inférieur ou supérieur à $\overline{Q}$.