PLAFOND DE CONCENTRATION EN CARBONE ET SUBSTITUTIONS ENTRE RESSOURCES ÉNERGÉTIQUES[1]

Ujjayant Chakravorty[2], Bertrand Magné[3]
et
Michel Moreaux[4]

version révisée
30 janvier 2004

[1]Les auteurs remercient Bernard Caillaud et les deux rapporteurs anonymes pour leurs remarques sur une version préliminaire de cet article. Ils remercient également Gérard Gaudet pour les discussions stimulantes qu'ils ont eu avec lui lors de la résolution du problème initialement posé.

[2]Emory University, Atlanta, G.A. E-mail : uuc@emory.edu.

[3]Université de Toulouse 1 (LERNA), 21 allée de Brienne, 31000 Toulouse, France. E-mail :bertrand.magne@univ-tlse1.fr.

[4]Université de Toulouse I, (IUF, IDEI et LERNA), 21 allée de Brienne, 31000 Toulouse, France. E-mail : mmoreaux@cict.fr

Table des matières

1 Introduction

L'utilisation à grande échelle d'un combustible carboné fossile induit l'accumulation dans l'atmosphère d'un stock de polluants dont on peut penser qu'il ne devrait pas dépasser un certain seuil. On se propose dans cette étude de déterminer le sentier d'utilisation optimale d'une telle ressource non renouvelable tout en respectant ce type de contrainte, lorsque la société est également en mesure d'exploiter un substitut renouvelable non polluant, mais plus coûteux, et qui, éventuellement, n'est disponible qu'en quantité limitée[1].

Il existe une littérature assez conséquente sur l'utilisation optimale d'une ressource non renouvelable génératrice de dommages dont l'intensité dépend du stock de polluant accumulé, en présence d'un substitut renouvelable que l'on pourrait qualifier de propre. On trouvera dans Tahvonen (1997) un survol de cette littérature ainsi que les résultats les plus achevés dans un cadre d'analyse partielle, cadre retenu ici. D'une lecture attentive de l'article de Tahvonen il ressort d'abord que les systèmes d'hypothèses qui postulent que les différentes forces en présence exercent leurs effets graduellement, ne permettent pas de mettre très clairement en évidence là où se "jouent les coups". Comme souvent, un système d'hypothèses plus caricaturales permet d'accéder très vite à l'essentiel. Les raisons pour lesquelles on bascule d'un type de sentier optimal à un autre, sont plus aisément répérables sous des hypothèses simples. Ce sont pour les mêmes raisons qu'on change d'un type de sentier à un autre sous des hypothèses moins extrêmes, les sentiers optimaux dans ce dernier cas apparaissant alors comme des lissages des sentiers obtenus sous les hypothèses que nous retenons.

Une seconde raison est que les hypothèses du genre de celles que retient Tahvonen ne rendent pas compte d'une situation dans laquelle il existerait un seuil critique de concentration des gaz à effet de serre au-delà duquel on assisterait à des bouleversements majeurs du système climatique qu'il faudrait à tout prix éviter[2]. Or il semble actuellement se dégager un consensus sur l'existence d'un tel seuil. L'évaluation des dommages tant que ce seuil n'est pas atteint est en revanche beaucoup plus sujette à caution.

Pour aller à l'essentiel on suppose qu'il n'existe qu'une seule ressource épuisable polluante et qu'une seule ressource renouvelable non polluante, chacune ayant un coût moyen d'exploitation constant. La fonction de demande est, pour simplifier, posée stationnaire[3]. On formule le problème comme un problème de recherche de sentiers optimaux, l'interprétation des variables duales en termes de prix ou de taux de taxation étant immédiate dans un cadre d'analyse partielle.

Le modèle est exposé à la section 2. On étudie à la section 3 le cas dans lequel le

[1] Le problème de l'ordre dans lequel on doit exploiter un ensemble de ressources renouvelables et non renouvelables est une question classique de l'économie des ressources naturelles, cf. Amigues et alii (1997-a, 1997-b, 1998), Amigues et Moreaux (2002), Chakravorty et Krulce (1994), Chakravorty, Krulce et Roumasset (2003), Gaudet et alii (2001), Kemp et Long (1980-a, 1980-b, 1984) et Lewis (1982).

[2] Sur ce point on pourra consulter Rouillon (2000), quoique le modèle qu'il propose ne tienne pas compte du caractère fini du stock de la ressource polluante.

[3] Cf. Chakravorty, Magné et Moreaux (2003-b), pour une généralisation à un environnement non stationnaire.

substitut renouvelable propre, plus coûteux à exploiter que la ressource fossile, est abondant, et à la section 4 le cas dans lequel ce substitut propre plus coûteux n'est disponible qu'en quantité limitée. On conclut à la section 5.

2 Le modèle

2.1 Hypothèses et notations

On considère une économie dans laquelle le surplus brut instantané permis par une consommation énergétique q_t est donnée par les valeurs d'une fonction u ayant les propriétés classiques suivantes[4] :

Hypothèse H.1 $u : \mathcal{R}_{++} \rightarrow \mathcal{R}_{+}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et positive, de plus :

a. $du/dq \equiv u'(q) > 0, q > 0,$ et $\lim_{q \downarrow 0} u'(q) = +\infty$;

b. $d^2u/dq^2 \equiv u''(q) < 0, q > 0.$

On notera parfois p_t le surplus social marginal brut à l'instant $t, p_t = u'(q_t)$ et d l'inverse de la fonction de surplus marginal : $d(p_t) = u^{'-1}(p_t)$.

Pour tout sentier de consommation énergétique Q, borné supérieurement, c'est-à-dire tout sentier $Q = \{q_t | \exists \bar{q} > 0 \ : q_t \leq \bar{q}, t \geq 0\}$, le bien être social brut $W(Q)$ est égal à la somme des surplus bruts actualisés à un taux constant ρ :

$$W(Q) = \int_0^{+\infty} u(q_t) e^{-\rho t} dt.$$

La société dispose de deux sources d'énergie primaire. Une énergie fossile polluante et une énergie renouvelable propre. Pour les utilisateurs finals les deux formes d'énergie sont de parfaits substituts l'une de l'autre. En d'autres termes si x_t est la consommation instantanée d'énergie non renouvelable et y_t la consommation d'énergie renouvelable alors le surplus brut instantané est égal à $u(x_t + y_t)$.

Le stock de ressource non renouvelable ou épuisable initialement disponible est égal à X^0. Le coût moyen de mise à la disposition des usagers de cette ressource est supposé constant et noté c_e, de sorte que le coût total instantané d'une consommation x_t, s'élève à $c_e x_t$.

La consommation de la ressource non renouvelable génère un flux de rejets polluants dans l'atmosphère. Soit ζ le contenu en polluant d'une unité de ressource épuisable. Le volume de polluant rejeté à l'instant t, z_t, est donc égal à ζx_t.

Soit Z_t le stock de polluant présent dans l'atmosphère à l'instant t. Le milieu a une certaine capacité d'autorégénération. Soit $\alpha > 0$ le taux d'autorégénération que pour simplifier on suppose constant. En l'absence de rejets le stock de polluant aurait tendance à disparaître, puisqu'on aurait $\dot{Z}_t = -\alpha Z_t$, et donc $Z_t = Z_0 e^{-\alpha t}$. Sa dynamique, tant que la société utilise la ressource fossile, est définie par l'équation suivante :

$$\dot{Z}_t = z_t - \alpha Z_t = \zeta x_t - \alpha Z_t.$$

[4] Stricto sensu q_t est une puissance (énergie par unité de temps) et l'énergie consommée sur un intervalle de temps $[t_i, t_2]$ est égale à $\int_{t_1}^{t_2} q_t dt$.

On suppose que la société veut que le stock de polluant ne dépasse pas un certain plafond $\bar{Z}$.

L'énergie renouvelable est disponible sous forme d'un flux d'intensité $\bar{y}$ supposée constante de sorte que la quantité maximale d'énergie disponible à cette source sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, est égale à $\bar{y}[t_2 - t_1]$. Cette énergie n'est pas stockable, sinon à un coût prohibitif. Toute partie de $\bar{y}$ qui n'est pas immédiatement exploitée est de ce fait définitivement perdue. Le coût moyen de mise à la disposition des usagers de l'énergie en question est égale à c_r et le coût total du flux de consommation y_t, est égal à $c_r y_t$.

La contrainte de plafonnement du stock de polluant n'a d'incidence sur le plan d'utilisation optimale des ressources que pour certaines configurations des paramètres, lorsque les réserves initiales de la ressource non renouvelable sont importantes ou lorsque le plafond de pollution imposé est bas.

Si le coût de l'énergie fossile est inférieur à celui de l'énergie renouvelable, la société a évidemment intérêt à consommer en priorité la ressource non renouvelable. C'est clairement la situation à l'heure présente : l'électricité produite par les centrales thermiques est moins coûteuse que l'électricité éolienne. Pour que la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ infléchisse la trajectoire de consommation optimale il faut alors que la condition suivante soit satisfaite. Définissons $\tilde{x}$ comme la consommation de ressource non renouvelable pour laquelle le surplus marginal est égal au coût marginal d'exploitation de cette ressource : $u'(\tilde{x}) = c_e$. Ce serait la consommation optimale de la dite ressource si la quantité disponible était infinie et si la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ n'était pas prise en compte. Définissons maintenant $\bar{x}$ comme le niveau maximal de consommation de la ressource non renouvelable permis lorsque Z_t a atteint sa valeur plafond $\bar{Z}$: $\bar{x} = \alpha\bar{Z}/\zeta$. Une condition nécessaire pour que la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ infléchisse le sentier de consommation lorsque X^0 est suffisamment élevé, ou Z^0 est suffisamment proche de $\bar{Z}$, est que $\bar{x} < \tilde{x}$, ce qu'on démontrera à la section 3. Notons $\bar{p}_e$ le surplus marginal en $q = \bar{x}$: $\bar{p}_e \equiv u'(\bar{x})$. Pour ces raisons on pose donc :

Hypothèse H.2 $c_e < c_r$ et $\bar{x} < \tilde{x}$ (ou $\bar{p}_e > c_e$).

Convenons de noter $\tilde{y}$ le taux d'utilisation de la ressource renouvelable pour lequel le surplus marginal est égal à son coût marginal : $u'(\tilde{y}) = c_r$. On dira que la ressource renouvelable est *abondante* si $\bar{y} \geq \tilde{y}$, qu'elle est *rare* dans le cas contraire[5]. On note $\overline{p}_r$ le surplus brut marginal d'une consommation égale à la totalité du flux disponible de ressource renouvelable lorsque celle-ci est rare, $\overline{p}_r = u'(\bar{y})$, et $\overline{p}_{er}$ le surplus brut marginal d'une consommation égale à la somme du flux disponible de ressource renouvelable et du flux de ressource non renouvelable lorsqu'il est contraint, $\overline{p}_{er} = u'\left(\overline{x} + \overline{y}\right)$.

[5]Lorsque la ressource renouvelable est rare, il se pourrait qu'il faille utiliser la ressource non renouvelable même si elle est plus coûteuse à exploiter (cf Chakravorty, Magné et Moreaux (2003-a)). Le cas peut paraître anecdotique aujourd'hui. Il correspond à la situation qui prévalait avant la révolution industrielle qui est d'abord une révolution énergétique, la mise au point de la machine à vapeur ayant permis une réduction drastique du coût d'exploitation des mines et en particulier des mines de charbon (cf Wrigley (1988)).

2.2 Formulation du problème et conditions d'optimalité

L'objectif du planificateur social est de déterminer les trajectoires de consommation des deux types d'énergie, qui maximisent le bien être social net tout en respectant la contrainte de plafond de pollution. Le problème qu'il doit résoudre est donc le problème (P) suivant :

$$(P) \quad \max_{\{(x_t, y_t, t \geq 0)\}} \quad \int_0^\infty [u(x_t + y_t) - c_e x_t - c_r y_t] e^{-\rho t} dt \tag{1}$$

$$s.c. \quad \dot{X}_t = -x_t, \quad X_t \geq 0, \quad \text{et} \quad X_0 = X^0 > 0 \text{ donné} \tag{2}$$

$$x_t \geq 0 \tag{3}$$

$$\dot{Z}_t = \zeta x_t - \alpha Z_t, \quad Z_0 = Z^0 < \bar{Z} \text{ donné} \tag{4}$$

$$\bar{Z} - Z_t \geq 0 \tag{5}$$

$$\bar{y} - y_t \geq 0 \quad \text{et} \quad y_t \geq 0. \tag{6}$$

Soit L_t le lagrangien en valeur courante de ce problème[6] :

$$\begin{aligned} L_t &= u(x_t + y_t) - c_e x_t - c_r y_t - \lambda_t x_t + \mu_t[\zeta x_t - \alpha Z_t] \\ &\qquad + \nu_t[\bar{Z} - Z_t] + \underline{\gamma}_{et} x_t + \bar{\gamma}_{rt}[\bar{y} - y_t] + \underline{\gamma}_{rt} y_t. \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre de maximisation du lagrangien sont :

$$\partial L_t / \partial x_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'(x_t + y_t) - c_e - \lambda_t + \zeta \mu_t + \underline{\gamma}_{et} = 0 \tag{7}$$

$$\partial L_t / \partial y_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'(x_t + y_t) - c_r - \bar{\gamma}_{rt} + \underline{\gamma}_{rt} = 0 \tag{8}$$

et les conditions d'écarts complémentaires suivantes doivent être vérifiées :

$$\nu_t \geq 0, \ \bar{Z} - Z_t \geq 0 \quad \text{et} \quad \nu_t[\bar{Z} - Z_t] = 0 \tag{9}$$

$$\underline{\gamma}_{et} \geq 0, \ x_t \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}_{et} x_t = 0 \tag{10}$$

$$\bar{\gamma}_{rt} \geq 0, \ \bar{y} - y_t \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_{rt}[\bar{y} - y_t] = 0 \tag{11}$$

$$\underline{\gamma}_{rt} \geq 0, \ y_t \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}_{rt} y_t = 0. \tag{12}$$

Puisque le stock X_t n'apparait pas dans le Lagrangien, alors λ_t doit croître au taux d'actualisation social ρ :

$$\dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t - \partial L_t / \partial X_t \Rightarrow \dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t \Leftrightarrow \lambda_t = \lambda_0 e^{\rho t}. \tag{13}$$

[6] Comme il est d'usage dans ce genre de problème on néglige la contrainte $X_t \geq 0$ dans l'écriture du lagrangien et on n'examine que les sentiers x_t qui la respectent.

A tout instant t où μ_t est différentiable, on doit avoir :

$$\dot{\mu}_t = \rho\mu_t - \partial L_t/\partial Z_t \Rightarrow \dot{\mu}_t = (\rho+\alpha)\mu_t + \nu_t. \tag{14}$$

On remarquera d'abord que la variable μ_t est non positive puisqu'une valeur plus élevée de Z_t à un instant auquel le plafond $\bar{Z}$ ne serait pas déjà atteint, aurait pour conséquence, s'il doit l'être ultérieurement, de déprimer la valeur optimisée de la fonction d'objectif. On remarquera ensuite que si sur l'intervalle $[0,t]$, $\bar{Z} - Z_\tau > 0$, alors $\nu_\tau = 0$ et donc $\mu_t = \mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}$.

Enfin les conditions de transversalité à l'infini ont ici pour expression :

$$\lim_{t\uparrow+\infty} e^{-\rho t}\lambda_t X_t = \lambda_0 \lim_{t\uparrow+\infty} X_t = 0 \tag{15}$$

$$\lim_{t\uparrow+\infty} e^{-\rho t}\mu_t Z_t = 0. \tag{16}$$

Les caractéristiques de la solution du problème (P) reposent sur les propriétés des fonctions $\tilde{x}_t(\lambda_0), \tilde{Z}_t(\lambda_0), \hat{x}_t(\lambda_0,\mu_0)$, $\hat{Z}(\lambda_0,\mu_0)$, $\check{Z}_t(\lambda_0)$ et $\check{Z}_t(\lambda_0,\mu_0)$, qui permettent de définir les valeurs critiques de X_0 et Z_0 pour lesquelles la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ est effective et lorsqu'elle l'est, d'identifier le type de sentier optimal.

Pour tout $\lambda_0, 0 < \lambda_0 < c_r - c_e$, on définit la fonction $\tilde{x}_t(\lambda_0)$ comme le taux de consommation de la ressource non renouvelable à l'instant t pour lequel le surplus marginal est égal au coût marginal augmenté de la rente minière unitaire à ce même instant. En d'autres termes, $\tilde{x}_t(\lambda_0)$ est la solution de l'équation $u'(x) = c_e + \lambda_0 e^{\rho t}$. Ce serait le taux optimal d'exploitation de la ressource non renouvelable si la contrainte de plafond de concentration pouvait être négligée et si $\lambda_0 e^{\rho t}$ était la valeur optimale de la rente minière.

Il est clair que pour tout λ_0 donné, $\tilde{x}_t(\lambda_0)$ est une fonction décroissante du temps et qu'à toute date t, $\tilde{x}_t(\lambda_0)$ est une fonction décroissante de λ_0 :

$$\partial\tilde{x}_t(\lambda_0)/\partial t = \rho\lambda_0 e^{\rho t}/u''(\tilde{x}_t(\lambda_0)) < 0$$

$$\partial\tilde{x}_t(\lambda_0)/\partial\lambda_0 = e^{\rho t}/u''(\tilde{x}_t(\lambda_0)) < 0$$

avec :

$$\lim_{\lambda_0\downarrow 0} \tilde{x}_t(\lambda_0) = \tilde{x}.$$

On note $\tilde{Z}_t(\lambda_0)$ le sentier du stock de polluant qu'implique le sentier de consommation $\tilde{x}_t(\lambda_0)$, partant de Z_0. En d'autres termes $\tilde{Z}_t(\lambda_0)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\partial\tilde{Z}_t(\lambda_0)/\partial t = \zeta\tilde{x}_t(\lambda_0) - \alpha\tilde{Z}_t(\lambda_0) \text{ et } \tilde{Z}_t(\lambda_0) = Z^0.$$

La fonction $\check{Z}_t(\lambda_0)$ correspond au stock de polluant engendré par le sentier de consommation $x_t = max\{\tilde{x}_t(\lambda_0) - \bar{y}, 0\}$, partant de Z_0. On a donc :

$$\check{Z}_0(\lambda_0) = Z^0,$$

et en tout t où $\check{Z}_t(\lambda_0)$ est différentiable par rapport à t :

$$\partial\check{Z}_t(\lambda_0)/\partial t = \zeta \max\{\tilde{x}_t(\lambda_0) - \bar{y}, 0\} - \alpha\check{Z}_t(\lambda_0).$$

Pour tout $\lambda_0, 0 < \lambda_0 < c_r - c_e$, et tout $\mu_0, 0 < -\zeta\mu_0 + \lambda_0 < c_r - c_e$, on définit la fonction $\hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0)$ comme le taux de consommation de la ressource non renouvelable solution de l'équation $u'(x) = c_e + \lambda_0 e^{\rho t} - \zeta\mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}$. Ce serait le taux optimal d'exploitation de la ressource non renouvelable si à l'instant t la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ n'était pas active mais devrait l'être dans le futur, $-\mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}$ étant la valeur optimale de la pénalité par unité de carbone rejetée dans l'atmosphère, et $\lambda_0 e^{\rho t}$ la valeur optimale de la rente minière.

Au sentier de consommation $\hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0)$ et au stock initial de polluant Z^0 est associé le sentier du stock de pollution $\hat{Z}_t(\lambda_0, \mu_0)$:

$$\partial\hat{Z}_t(\lambda_0, \mu_0)/\partial t = \zeta\hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0) - \alpha\hat{Z}_t(\lambda_0, \mu_0) \quad \text{et} \quad \hat{Z}_0(\lambda_0, \mu_0) = Z^0.$$

La fonction $\check{Z}_t(\lambda_0, \mu_0)$ correspond au stock de polluant engendré par le flux de consommation $x_t = max\{\hat{x}(\lambda_0, \mu_0) - \bar{y}, 0\}$. On a donc :

$$\check{Z}_0(\lambda_0, \mu_0) = Z^0,$$

et en tout t où $\check{Z}_t(\lambda_0, \mu_0)$ est différentiable par rapport à t :

$$\partial\check{Z}_t(\lambda_0, \mu_0)/\partial t = \zeta max\{\hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0) - \bar{y}, 0\} - \alpha\check{Z}_t(\lambda_0, \mu_0).$$

3 Le substitut renouvelable est abondant

Supposons que la ressource renouvelable soit abondante, c'est-à-dire que la quantité $\tilde{y}$ pour laquelle le surplus marginal instantané est égal à son coût marginal instantané d'exploitation, ne soit pas supérieure au flux permanent d'apports $\bar{y}$.

On détermine d'abord le montant critique du stock initial de la ressource non renouvelable, que l'on note $\bar{X}^0$, en-deçà duquel la condition (5) ne contraint pas la solution du problème et au-delà duquel cette contrainte est active. On montre ensuite que si $X^0 > \bar{X}^0$ la structure du sentier optimal, c'est à dire les types de phases et leur enchaînement, dépend des valeurs relatives de $\tilde{y}$ et $\bar{x}$, mais pas de X^0.

3.1 Détermination du niveau critique du stock initial de ressource non renouvelable

Si on néglige la contrainte de plafond de pollution, la valeur optimale de λ_0, notée λ_0^f, est déterminée de la façon habituelle dans ce genre de problème[7]. Au cours d'un premier intervalle de temps $[0, t^f]$ les usagers sont approvisionnés par la seule ressource non renouvelable, la ressource la moins coûteuse. Le respect des conditions de premier ordre au cours de cette période impose qu'à chaque instant $x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0)$, c'est-à-dire qu'à chaque instant soit satisfaite la règle d'Hotelling standard. A l'issue de la dite période la ressource non renouvelable doit être épuisée et son coût marginal

[7] Cf. Herfindahl (1967).

total, coût marginal stricto sensu, c_e, augmenté de la rente minière $\lambda_0 e^{\rho t}$, doit être égal au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable c_r. Ensuite la société consomme la seule ressource renouvelable. λ_0^f et t^f sont donc les valeurs de λ_0 et t solution du système d'équations :

$$\begin{aligned}\int_0^t d(c_e + \lambda_0 e^{\rho\tau})d\tau &= \int_0^t \tilde{x}_\tau(\lambda_0)d\tau = X^0 \quad , \\ c_e + \lambda_0 e^{\rho t} &= c_r.\end{aligned}$$

λ_0^f est une fonction décroissante de X_0 et t^f une fonction croissante, avec :

$$\lim_{X^0 \downarrow 0} \lambda_0^f = c_r - c_e \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow +\infty} \lambda_0^f = 0$$

$$\lim_{X^0 \downarrow 0} t^f = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow +\infty} t^f = +\infty$$

$$\lim_{X^0 \uparrow +\infty} \tilde{x}_t(\lambda_0) = \tilde{x}, \quad t \geq 0.$$

Bien que le sentier d'émissions polluantes $z_t = \zeta\tilde{x}_t(\lambda_0^f)$ soit en permanence décroissant, au cours de l'intervalle de temps $[0, t^f]$, de $\zeta\tilde{x}_0(\lambda_0^f)$ à $\zeta\tilde{y}$, la trajectoire du stock de pollution $\tilde{Z}_t(\lambda_0^f)$ peut a priori avoir des profils très différents. Par exemple si Z^0 est relativement élevé et $\bar{x} < \tilde{x}_t(\lambda_0^f) < \tilde{y}$ le sentier $\tilde{Z}_t(\lambda_0^f)$ sera constamment décroissant. On peut avoir aussi des trajectoires d'abord croissantes puis décroissantes.

Pour tout X^0, ou tout λ_0^f, définissons $\bar{Z}(\lambda_0^f)$ comme le plus grand stock de pollution atteint sur l'intervalle $[0, t^f]$:

$$\bar{Z}(\lambda_0^f) = sup\{\tilde{Z}_t(\lambda_0^f), t \in [0, t^f]\}.$$

Puisque $\tilde{x}_t(\lambda_0^f)$ est pour tout t une fonction décroissante de $\lambda_0^f, \bar{Z}(\lambda_0^f)$ est aussi une fonction décroissante de λ_0^f ou une fonction croissante de X^0. Plus précisément, si $X^0 \uparrow +\infty$ alors $\tilde{x}_t(\lambda_0) \uparrow \tilde{x}$, et sur un intervalle de temps $[0, \theta)$, d'autant plus long que X^0 est élevé, on a :

$$\tilde{Z}_t(\lambda_0^f) \simeq \zeta\tilde{x}/\alpha + (Z_0 - \zeta\tilde{x}/\alpha)e^{-\alpha t} \;, \qquad t \in [0, \theta)$$

de sorte que pour t suffisamment grand, sous l'hypothèse H.2 $\bar{x} < \tilde{x}$:

$$\tilde{Z}_t(\lambda_0^f) \simeq \zeta\tilde{x}/\alpha > \zeta\bar{x}/\alpha = \bar{Z}.$$

Il existe donc sous l'hypothèse H.2 une valeur critique de X^0, que l'on note $\bar{X}^0$ telle que $\bar{Z}(\lambda_0^f) = \bar{Z}$. Si $X^0 \leq \bar{X}^0$, la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ peut être négligée. Les trajectoires de consommation sont des trajectoires habituelles c'est-à-dire que $q_t = \tilde{x}_t(\lambda_0^t)$ sur l'intervalle de temps $[0, t^f]$ et $q_t = \tilde{y}$ ensuite. Si au contraire $X^0 > \bar{X}^0$ la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ sera active et le sentier d'exploitation optimale n'est pas celui de la règle d'Hotelling standard.

On remarquera que sous les hypothèses posées, l'instant que l'on notera t^m, auquel $\widetilde{Z}_t(\lambda_0^f) = \overline{Z}$ si $X^0 = \overline{X}^0$, est nécessairement unique. C'est une conséquence du fait que la fonction $\widetilde{x}_t(\lambda_0^f)$ est une fonction continue et décroissante de t. Il en résulte d'abord qu'en t^m on doit avoir $\widetilde{x}_{t^m}(\lambda_0^f) = \overline{x}$. Si en effet on avait $\widetilde{x}_{t^m}(\lambda_0^f) > \overline{x}$, on aurait alors $\widetilde{x}_t(\lambda_0^f) > \overline{x}$ sur un certain intervalle $(t^m, t^m + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, le stock de polluant continuerait à croître sur un intervalle $(t^m, t^m + \varepsilon')$, $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, et le plafond $\overline{Z}$ serait dépassé. Si on avait au contraire $\widetilde{x}_{t^m}(\lambda_0^f) < \overline{x}$, on aurait aussi $\widetilde{x}_{t^m}(\lambda_0^f) < \overline{x}$ sur un intervalle $(t^m - \varepsilon, t^m)$, $\varepsilon > 0$, et pour que $\widetilde{Z}_t(\lambda_0^f) = \overline{Z}$ en $t = t^m$, il faut que $\widetilde{Z}_t(\lambda_0^f) > \overline{Z}$ sur un intervalle $(t^m - \varepsilon', t^m)$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, d'où une contradiction car par hypothèse $\widetilde{Z}_t(\lambda_0^f) \leq \overline{Z}$, $t \in [0, +\infty)$, si $X^0 = \bar{X}^0$. Puisque $\widetilde{x}_{t^m}(\lambda_0^f) = \overline{x}$ et $\widetilde{Z}_{t^m}(\lambda_0^f) = \overline{Z}$ et puisque $\widetilde{x}_t(\lambda_0^f)$ décroît au cours du temps, on conclut qu'on a nécessairement $\widetilde{Z}_t(\lambda_0^f) < \overline{Z}$ et $\widetilde{x}_t(\lambda_0^f) > \overline{x}$ si $t < t^m$, et $\widetilde{Z}_t(\lambda_0^f) < \overline{Z}$ et $\widetilde{x}_t(\lambda_0^f) < \overline{x}$ si $t > t^m$, lorsque $X^0 = \bar{X}^0$.

On suppose à partir de maintenant que $X^0 > \bar{X}^0$.

3.2 Caractérisation des sentiers optimaux

Il convient de distinguer selon que le surplus marginal brut d'une consommation de ressource non renouvelable contrainte parce que le plafond de pollution est atteint, est inférieur ou supérieur au coût d'exploitation de la ressource renouvelable. Dans le premier cas il n'y jamais consommation simultanée des deux ressources, dans le second cas au contraire, les deux ressources doivent être exploitées simultanément dès que le plafond de pollution est atteint.

a. Le surplus brut marginal au plafond de pollution de consommation de la ressource non renouvelable est inférieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable : $\overline{p}_e < c_r$

Dans ce cas le sentier optimal de surplus brut marginal, le sentier de prix, comprend quatre phases (voir Figure 1). Au cours des trois premières phases les usagers sont approvisionnés à partir de la seule ressource non renouvelable. Sur l'intervalle $[0, t_1)$ le plafond $\bar{Z}$ n'est pas encore atteint mais il le sera plus tard, de sorte que $\nu_t = 0$ et $\mu_t = \mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}$; le prix ou plus précisément le coût marginal social, est donc égal à $p_t = c_e + \lambda_0 e^{\rho t} - \zeta \mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}$, et croit de $p_0 = c_e + \lambda_0 - \zeta\mu_0$, $c_e < p_0 < \bar{p}_e$, jusqu'au niveau critique $\bar{p}_e$ atteint en t_1 ; la consommation décroît, de $x_0 = \hat{x}_0(\lambda_0, \mu_0) > \bar{x}$ à $\hat{x}_{t_1}(\lambda_0, \mu_0) = \bar{x}$, et à la date $t_1, Z_{t_1} = \bar{Z}$, le stock de polluant est à son niveau plafond. Le stock de polluant reste à son niveau plafond sur la totalité de l'intervalle $[t_1, t_2)$ pendant lequel $x_t = \bar{x}$ et donc le prix est égal à $\bar{p}_e$. A partir de $t_2, Z_t < \bar{Z}$, de sorte que $\mu_t = 0$. Au cours de la troisième période $[t_2, t_3)$ le prix croît à nouveau, de $\bar{p}_e$ à c_r, la consommation $q_t = x_t$ décroît de $\bar{x} = \tilde{x}_{t_2}(\lambda_0)$ à $\tilde{x}_{t_3}(\lambda_0) = \tilde{y}$, le stock de ressource non renouvelable étant épuisé à la date t_3. A partir de t_3 la société est approvisionnée par la seule ressource renouvelable et $q_t = \tilde{y}, t \in [t_3, +\infty)$.

Figure 1 ici

Pour montrer comment le sentier est construit et pourquoi les conditions de premier ordre (7)-(16) sont satisfaites, partons de la dernière période au cours de laquelle la ressource non renouvelable est consommée, la période $[t_2, t_3)$ de durée $\delta_3 = t_3 - t_2$. La ressource consommée pendant cette période, qu'on note $X_{(3)}$, est le stock nécessaire pour soutenir un taux de consommation égal à $\bar{x}$ en t_2 et à $\tilde{y}$ en t_3, la règle d'Hotelling standard étant satisfaite durant toute la période puisqu'à partir de t_2 le plafond de pollution ne sera jamais plus atteint. On doit donc avoir au cours de cette période $x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0)$. Puisque l'utilité marginale de la consommation doit passer de $\bar{p}_e$ à c_r au cours de l'intervalle en question, on doit aussi avoir :

$$c_e + \lambda_0 e^{\rho t_2} = \bar{p}_e \quad \text{et} \quad c_e + \lambda_0 e^{\rho(t_2+\delta_3)} = c_r$$

d'où

$$\lambda_0 e^{\rho t_2} = \bar{p}_e - c_e \quad \text{et} \quad \delta_3 = \rho^{-1}[log(c_r - c_e) - log(\bar{p}_e - c_e)] \tag{17}$$

$$X_{(3)} = \int_{t_2}^{t_2+\delta_3} \tilde{x}_t\left((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}\right) dt = \int_0^{\delta_3} \tilde{x}_t(\bar{p}_e - c_e)dt. \tag{18}$$

Si maintenant à une date $t', Z_{t'} = \bar{Z}$ et $X_{t'} > X_{(3)}$, le sentier optimal à partir de la date t' consiste d'abord à consommer au taux maximum $\bar{x}$ jusqu'à ce que le stock soit ramené au niveau $X_{(3)}$, c'est-à-dire pendant une phase préliminaire de durée $(X_{t'} - X_{(3)})/\bar{x}$, et ensuite à suivre un sentier similaire à celui de la troisième période.

Durant la première phase $[0, t_1]$, seule la ressource non renouvelable est utilisée et le stock de polluant est inférieur au plafond imposé. Puisque $Z_t < \bar{Z}$, alors $\nu_t = 0$ et pour que les conditions de premier ordre soient satisfaites il faut que $x_t = \hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0)$, où $\lambda_0 = (\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}$ et μ_0 est à déterminer.

Finalement il reste à déterminer trois inconnues : t_1, t_2 et μ_0. Pour ce faire on dispose des trois conditions suivantes :

i- la consommation cumulée de la ressource non renouvelable doit être égale au stock disponible :

$$\int_0^{t_1} \hat{x}_t\left((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0\right) dt + \overline{x}[t_2 - t_1] = X^0 - X_{(3)} \ ; \tag{19}$$

ii- le stock de polluant doit atteindre son plafond en t_1 :

$$\hat{Z}_{t_1}\left((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0\right) = \bar{Z} \ ; \tag{20}$$

iii- le sentier de consommation doit être continu en t_1

$$\hat{x}_{t_1}\left((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0\right) = \bar{x}. \tag{21}$$

On vérifie aisément que les conditions de premier ordre (7)-(16) sont satisfaites pour les valeurs suivantes des variables duales :

$$\underline{\gamma}_{et} = \begin{cases} 0 & , t \in [0, t_3) \\ c_e + \lambda_0 e^{\rho t} - c_r & , t \in [t_3, +\infty) \end{cases} \quad ; \quad \bar{\gamma}_{rt} = 0, t \in [0, +\infty)$$

$$\underline{\gamma}_{rt} = \begin{cases} c_r - [c_e + \lambda_0 e^{\rho t} - \zeta \mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}] & , t \in [0, t_1) \\ c_r - \bar{p}_e & , t \in [t_1, t_2) \\ c_r - \left[c_e + \lambda_0 e^{\rho t}\right] & , t \in [t_2, t_3) \\ 0 & , t \in [t_3, +\infty) \end{cases}$$

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_0 e^{(\rho+\alpha)t} & , t \in [0, t_1) \\ -[\bar{p}_e - (c_e + \lambda_0 e^{\rho t})]/\zeta & , t \in [t_1, t_2) \\ 0 & , t \in [t_2, +\infty) \end{cases}$$

$$\nu_t = \begin{cases} 0 & , t \in [0, t_1] \cup [t_2, +\infty) \\ [(\rho+\alpha)/\zeta]\,(\bar{p}_e - c_e) - (\alpha/\zeta)(\bar{p}_r - c_e)e^{\rho(t-t_2)} & , t \in [t_1, t_2) \end{cases}$$

Enfin puisque $X_{t_3} = 0$ et $\mu_t = 0, t \geq t_2$, les conditions de transversalité (15) et (16) sont satisfaites[8].

On remarquera que la structure du sentier d'exploitation optimale des ressources, les types de phases et leur enchaînement, ne dépend pas du montant des réserves initiales en ressource polluante épuisable. Évidemment les durées des deux premières phases dépendent de ce montant.

b. Le surplus brut marginal au plafond de pollution de consommation de la ressource non renouvelable est supérieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable : $\bar{p}_e > c_r$

La différence essentielle entre ce cas et le cas précédent est qu'ici le taux de consommation de la ressource non renouvelable $\bar{x}$ qui permet de maintenir le stock de polluant à son plafond dès que $Z_t = \bar{Z}$, est inférieur à $\tilde{y}$. Donc si $X_t > 0$ et $Z_t = \bar{Z}$, la consommation doit être approvisionnée pour partie par la ressource renouvelable afin que les conditions de premier ordre (7) et (8) puissent être satisfaites. Puisque la ressource non renouvelable est moins coûteuse, on doit l'utiliser au maximum, $x_t = \bar{x}$, de sorte que $y_t = \tilde{y} - \bar{x}$. Par conséquent le sentier optimal comprend trois phases (cf. Figure 2). Au cours de la première phase, $[0, t_1)$, seule la ressource non renouvelable est utilisée au taux $\hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0)$ et en t_1 le plafond de pollution est atteint. Pendant la seconde phase, $[t_1, t_2)$, les deux ressources sont utilisées comme on vient de l'indiquer plus haut. En t_2 la ressource non renouvelable est épuisée. A partir de cette dernière date seule la ressource renouvelable approvisionne les usagers : $q_t = \tilde{y}, t \in [t_2, +\infty)$.

Figure 2 ici

[8] Il est facile de montrer, dans tous les cas que nous traiterons, que les conditions d'optimalité sont remplies. On ne répétera donc pas l'argument.

On notera qu'on doit avoir $\lambda_0 = (c_r - c_e)e^{-\rho t_2}$. Il faut donc déterminer trois inconnues t_1, t_2 et μ_0 et on dispose de trois équations de même type que dans le cas précédent, qui prennent ici la forme :

i- demande cumulée égale à l'offre :

$$\int_0^{t_1} \hat{x}_t \left((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0\right) dt + \bar{x}[t_2 - t_1] = X^0 \ ; \tag{22}$$

ii- plafond de pollution atteint en t_1 :

$$\hat{Z}_{t_1} \left((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0\right) = \bar{Z} \ ; \tag{23}$$

iii- continuité du sentier de consommation en t_1 :

$$\hat{x}_{t_1} \left((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0\right) = \widetilde{y}. \tag{24}$$

Comme dans le cas précédent la structure du sentier optimal ne dépend pas du montant des réserves X^0.

On peut donc conclure ainsi lorsque la ressource renouvelable est abondante ($\overline{y} > \tilde{y}$) et les disponibilités en ressource non renouvelable sont importantes ($X^0 > \overline{X}^0$). Si le coût d'exploitation de la ressource renouvelable est élevé, $c_r > \overline{p}_e$, il n'est jamais optimal d'exploiter simultanément les deux ressources. La ressource non renouvelable, peu coûteuse mais polluante, doit être exploitée en premier et la ressource renouvelable, coûteuse mais propre, doit prendre ensuite le relai. La phase initiale pendant laquelle la société n'est approvisionnée que par la ressource non renouvelable est elle-même divisée en trois périodes. Au cours de la première période, pendant laquelle le plafond de pollution n'est pas encore atteint, la consommation décroît et l'environnement se dégrade. A partir de l'instant auquel le stock de polluant atteint sa valeur limite $\overline{Z}$, la consommation de la ressource non renouvelable reste constante au niveau $\overline{x}$ qui permet de ne pas dépasser la limite en question, pendant un certain temps. Au cours de cette seconde période, bien que limitée au niveau $\overline{x}$, la consommation reste suffisamment importante pour que le surplus brut marginal qu'elle engendre, $\overline{p}_e$, soit inférieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable, c_r, de sorte qu'il n'est pas économiquement justifié d'exploiter le substitut non polluant. Cette seconde période dure jusqu'à l'instant auquel les réserves de ressource non renouvelable ont suffisamment baissé pour que, partant avec un stock de polluant $\overline{Z}$, la société puisse négliger la pollution qu'implique l'usage de la ressource non renouvelable. A compter de cette date, les trajectoires sont donc celles du modèle de Hotelling standard et la troisième et dernière période de la première phase est la période d'épuisement de la ressource non renouvelable. A l'issue de cette dernière période commence la seconde phase au cours de laquelle la ressource renouvelable est enfin exploitée et ce, indéfiniment.

Si au contraire la ressource renouvelable est peu coûteuse, $c_r < \overline{p}_e$, alors il y a nécessairement une phase d'exploitation simultanée des deux ressources et il n'y a jamais de période de type Hotelling standard. La consommation de ressource non renouvelable décroît jusqu'au moment où le plafond de pollution est atteint. A partir de ce moment, le volume de la consommation est déterminé par le coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable mais les deux ressources sont exploitées simultanément jusqu'à épuisement de la ressource non renouvelable, dont le volume consommé est désormais à chaque instant égal à ce qu'impose la contrainte de non dépassement du plafond de pollution, c'est à dire $\bar{x}$. Lorsque la ressource non renouvelable est épuisée, la consommation reste constante, simplement l'utilisation de la ressource renouvelable s'accroît d'un montant $\bar{x}$ pour compenser l'arrêt d'exploitation de la ressource non renouvelable. Lors de la transition, de la période d'exploitation des deux ressources à la phase d'exploitation de la seule ressource renouvelable, le surplus social net instantané décroît puisqu'on substitue une ressource à une autre, dont l'exploitation est plus coûteuse. Cependant le surplus social net instantané marginal est dans les deux cas déterminé par les conditions d'exploitation de la resource renouvelable, la plus coûteuse, et reste donc constant.

4 Le substitut renouvelable est rare

Supposons maintenant que la ressource renouvelable soit rare, i.e. $\bar{y} < \tilde{y}$ ou de façon équivalente que $\bar{p}_r > c_r$. Il en résulte que si le surplus marginal instantané est supérieur à c_r mais inférieur à $\bar{p}_r$, les conditions de premier ordre (7) et (8) ne peuvent être satisfaites que si les usagers utilisent la totalité du flux permanent de ressource renouvelable, le complément étant fourni par la ressource non renouvelable. La façon dont est déterminé le stock critique $\bar{X}^0$ en deçà duquel la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ n'est pas effective, doit donc être modifiée. On montre ensuite que la structure des trajectoires optimales de consommation, lorsque $X^0 > \bar{X}^0$, dépend d'abord du fait que $\bar{x}$ est inférieur ou supérieur à $\tilde{y}$ et, si $\bar{x}$ est inférieur à $\tilde{y}$, du fait que $\bar{x} + \bar{y}$ est inférieur ou supérieur à $\tilde{y}$.

4.1 Détermination du niveau critique du stock initial de ressource renouvelable

Négligeons la contrainte qui plafonne le stock de polluant. Nous devons tenir compte maintenant du fait que si $c_e + \lambda_0 e^{\rho t} \in (c_r, \bar{p}_e)$, il est optimal d'utiliser la totalité du flux de ressource renouvelable.

Supposons d'abord que $\lambda_0^f \in [c_r - c_e, \bar{p}_r - c_e)$. Pour que les conditions (7) et (8) soient satisfaites on doit avoir $y_t = \bar{y}$ et $x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0^f) - \bar{y}$ sur l'intervalle de temps $[0, t^f)$ où t^f est la date à laquelle $c_e + \lambda_0^f e^{\rho t} = \bar{p}_e$. Ce sentier de consommation est le sentier optimal si et seulement si le stock initial est égal à $\int_0^{t^f} \tilde{x}_t(\lambda_0^f)dt - \bar{y}t^f$. Soit $\bar{X}^{01}$ le stock correspondant à la valeur limite $\lambda_0^f = c_r - c_e$, et t_1^f la valeur correspondante de t^f :

$$X^{01} = \int_0^{t_1^f} \tilde{x}_t(c_r - c_e)dt - \bar{y}t_1^f \quad \text{et} \quad t_1^f = \rho^{-1}[log(\bar{p}_e - c_e) - log(c_r - c_e)].$$

Pour $\lambda_0^f \in [0, c_r - c_e)$, ou de façon équivalente pour $X^0 > \bar{X}^{01}$, soit t^g la date à laquelle $c_e + \lambda_0^f e^{\rho t} = c_r$. Alors sur l'intervalle de temps $[0, t^g), c_e + \lambda_0^f e^{\rho t} = u'(q_t) < c_r$ et seule la ressource non renouvelable est utilisée, $q_t = \tilde{x}_t(\lambda_0)$, tandis que sur l'intervalle $[t^g, t^g + t_1^f)$ les deux ressources sont utilisées, $x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0^f) - \bar{y}$ et $y_t = \bar{y}$. Ce dernier type de sentier est suivi si λ_0^f est la solution de :

$$X^0 = \int_0^{t^g + t_1^f} \tilde{x}_t(\lambda_0)dt - \bar{y}t_1^f.$$

Il est clair que λ_0^f est une fonction décroissante de X^0, avec :

$$\lim_{X^0 \downarrow 0} \lambda_0^f = \bar{p}_e - c_e \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow +\infty} \lambda_0^f = 0,$$

et que t^f et t^g sont des fonctions croissantes de X^0, avec :

$$\begin{aligned} \lim_{X^0 \downarrow 0} t^f &= 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow \bar{X}^{01}} t^f = t_1^f, \\ \lim_{X^0 \downarrow \bar{X}^{01}} t^g &= 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow +\infty} t^g = +\infty, \\ & \lim_{X^0 \uparrow +\infty} \tilde{x}_t(\lambda_0) = \tilde{x}. \end{aligned}$$

A tout λ_0^f, ou tout X^0, on peut associer la trajectoire de stock de polluant $Z_t(\lambda_0^f)$ partant de Z_0 qu'implique $\tilde{x}_t(\lambda_0^f) - \bar{y}$ si $\lambda_0^f \geq c_r - c_e$, ou $\tilde{x}_t(\lambda_0)$ jusqu'en t^g puis par $\tilde{x}_t(\lambda_0^f) - \bar{y}$ de t^g à $t^g + t_1^f$ si $\lambda_0^f < c_r - c_e$. Comme à la section 3 on définit $\bar{Z}(\lambda_0^f)$ comme la valeur maximale de $Z_t(\lambda_0^f)$. Si X^0 est suffisamment élevé, $x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0) \simeq \tilde{x}$ sur un intervalle de temps assez long $[0, \theta), \theta < t^g$, de sorte que $Z_t(\lambda_0^f) = \tilde{Z}_t(\lambda_0^f) \simeq \zeta\tilde{x}/\alpha > \zeta\bar{x}/\alpha = \bar{Z}$, pour $t < \theta$ suffisamment grand.

Il existe donc une valeur critique de $X^0, \bar{X}^0$, correspondant à la valeur de λ_0^f solution de $\bar{Z}(\lambda_0) = \bar{Z}$ en deçà de laquelle le plafond $\bar{Z}$ ne sera jamais atteint et au-delà de laquelle ce plafond sera crevé. On suppose dans la suite de cette section que $X^0 > \bar{X}^0$.

4.2 Caractérisation des sentiers optimaux.

Dans le cas d'une ressource renouvelable rare, il y a toujours une période d'exploitation simultanée des deux ressources, contrairement au cas où la ressource renouvelable est abondante. C'est une conséquence du fait que le sentier de consommation totale est continu et que, si son volume est tel que le surplus marginal brut qu'il génère est compris entre c_r et $\bar{p}_r$, la seule ressource renouvelable ne permet pas de satisfaire la consommation appelée. Il faut donc recourir à la ressource non renouvelable pour combler le déficit. C'est la caractéristique fondamentale de tous les sentiers optimaux d'utilisation des ressources lorsque la ressource renouvelable est rare. La seule question qui reste à discuter est donc celle de la date à partir de laquelle les deux ressources doivent être utilisées simultanément. Est-ce après que le plafond ait été atteint et ne le sera plus jamais ? Est-ce au cours de la phase pendant laquelle cette contrainte est effective, juste à la fin ou juste au début ? Est-ce enfin avant que la consommation de ressource non renouvelable soit contrainte ?

Il devrait être clair que la date à partir de laquelle la société doit utiliser la ressource renouvelable ne peut pas être comprise entre le début et la fin de la phase pendant laquelle la contrainte de plafond de pollution est active. Supposons en effet qu'on ait $x_t = \overline{x}$ et $Z_t = \overline{Z}$ sur l'intervalle (t_1, t_2), $y_t = 0$ sur le sous-intervalle $(t_1, t']$, $t_1 < t' < t_2$, et $y_t > 0$ sur le sous-intervalle (t', t_2) et montrons que cette politique n'est pas optimale. Imaginons qu'elle le soit. On devrait alors avoir pour que la condition de premier ordre (8) soit satisfaite :

$$\begin{aligned} u'(\overline{x} + y_t) &= c_r + \overline{\gamma}_{rt}, \quad \overline{\gamma}_{rt} \geq 0, \quad t \in \left(t', t_2\right), \\ u'(\overline{x}) &= c_r - \underline{\gamma}_{rt}, \quad \underline{\gamma}_{rt} \geq 0, \quad t \in \left(t_1, t'\right). \end{aligned}$$

Puisque u' est décroissante et $y_t > 0$, $t \in (t', t_2)$, ces deux égalités sont contradictoires. S'il est optimal d'utiliser la ressource renouvelable à la fin de la phase pendant laquelle la consommation de ressource non renouvelable est plafonnée, il faut commencer à l'utiliser dès le début de la phase en question. La période d'utilisation de la ressource renouvelable doit donc débuter soit avant que la contrainte de plafond limite la consommation de ressource non renouvelable et au plus tard à l'instant même où ce plafond est atteint, soit après que cette contrainte ait été active.

Comme dans le cas où la ressource renouvelable est abondante, il convient d'abord de distinguer selon que le surplus brut marginal de la consommation contrainte de ressource non renouvelable est inférieur ou supérieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable. S'il est inférieur, c'est-à-dire si le plafond de pollution est élevé et/ou le coût d'exploitation de la ressource renouvelable est conséquent, la ressource renouvelable ne doit être exploitée qu'une fois terminée la phase de blocage de la consommation de la ressource non renouvelable par la contrainte de plafonnement du stock de polluant, et ce aussi faibles que soient les disponibilités en ressource renouvelable. Si au contraire le surplus marginal de la consommation contrainte de ressource non renouvelable est supérieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable, il faut alors distinguer selon que le surplus brut marginal de la somme de la consommation contrainte de ressource non renouvelable et de la totalité du flux disponible de ressource renouvelable est inférieur ou supérieur au coût marginal d'exploitation de cette dernière. S'il est inférieur, la phase d'exploitation ne peut pas commencer avant que la contrainte de plafonnement du stock de polluant soit active, car le coût d'exploitation de la ressource renouvelable est trop élevé. S'il est supérieur, la phase d'exploitation de la ressource renouvelable doit débuter avant que la consommation de ressource non renouvelable bute sur la contrainte de plafonnement du stock de polluant.

a. Le surplus brut marginal au plafond de pollution de consommation de la ressource non renouvelable est inférieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable : $\overline{p}_e < c_r$

La différence avec le cas où $\overline{p}_e < c_r$ et la ressource est abondante, est que maintenant il existe une phase de consommation simultanée des deux ressources. Le sentier optimal, illustré à la Figure 3, comprend donc cinq phases. Au cours de la première, $[0, t_1)$, seule la ressource non renouvelable est utilisée au taux $\hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0)$ et en $t_1, Z_{t_1} = \bar{Z}$. Au cours de la seconde phase $[t_1, t_2)$ la seule ressource non renouvelable est utilisée au taux $x_t = \bar{x}$, taux maximum compatible avec le respect de la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ qui est alors saturée. Pendant la troisième phase $[t_2, t_3)$ les usagers sont toujours approvisionnés par la seule ressource non renouvelable mais maintenant au taux $\tilde{x}_t(\lambda_0)$. En t_3, $u'(\tilde{x}_{t_3}(\lambda_0)) = c_r$ et la consommation de la ressource non renouvelable chute d'un montant $\bar{y}$ compensé par un saut de même amplitude de la consommation de la ressource renouvelable qu'il convient alors de mettre en exploitation. Au cours de la quatrième phase $[t_3, t_4), q_t = \tilde{x}_t(\lambda_0), x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0) - \bar{y}$ et $y_t = \bar{y}$. A la date $t_4, \tilde{x}_{t_4}(\lambda_0) - \bar{y} = 0$ et la ressource non renouvelable est épuisée. Enfin au cours de la phase terminale $[t_4, +\infty), q_t = y_t = \bar{y}$.

Figure 3 ici

Pour montrer pourquoi ce sentier est le sentier optimal, considérons les deux dernières périodes pendant lesquelles la ressource non renouvelable est consommée. La quantité de ressource non renouvelable $X_{(34)}$ consommée au cours des troisième et quatrième phases du sentier est cette quantité qui est utilisée quand, partant à la date t_2 avec une rente minière $\lambda_{t_2} = \bar{p}_e - c_e$ croissant au taux ρ, la société consomme $x_t = \tilde{x}_t(\lambda_{t_2} e^{-\rho t_2}) = \tilde{x}_t((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2})$ sur l'intervalle de temps $[t_2, t_3)$ et $x_t = \tilde{x}_t((\bar{p} - c_e)e^{-\rho t_2}) - \bar{y}$ sur l'intervalle de temps $[t_3, t_4)$, d'où :

$$
\begin{aligned}
X_{(34)} &= \int_{t_2}^{t_4} \tilde{x}_t((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2})dt - \bar{y}[t_4 - t_3] \\
&= \int_0^{\delta_3+\delta_4} \tilde{x}_t((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2})dt - \bar{y}\delta_4 \qquad (25)
\end{aligned}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
t_3 &= t_2 + \delta_3 \quad \text{et} \quad \delta_3 = \rho^{-1}[\log c_r - \log(\bar{p}_e - c_r)] \qquad (26) \\
t_4 &= t_3 + \delta_4 \quad \text{et} \quad \delta_4 = \rho^{-1}[\log \bar{p}_r - \log(c_r - c_e)]. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Au cours de la phase initiale $[0, t_1)$ seule la ressource non renouvelable est utilisée alors que $Z_t < \bar{Z}$ impliquant que $\nu_t = 0$ et donc que $x_t = \hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0)$ où $\lambda_0 = (\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}$ et μ_0 est à déterminer.

Il reste finalement à déterminer les valeurs des trois seules inconnues, t_1, t_2 et μ_0. Pour ce on dispose toujours des trois mêmes types d'équations qu'à la section précédente mais qui prennent ici la forme suivante :

i- la consommation cumulée de la ressource épuisable est égale à l'offre :

$$\int_0^{t_1} \hat{x}_t((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2})dt + \bar{x}[t_2 - t_1] = X^0 - X_{(34)} \; ; \qquad (28)$$

ii- le plafond de polluant est atteint en t_1 :

$$\hat{Z}_{t_1}((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0) = \bar{Z} \; ; \qquad (29)$$

iii- le sentier de consommation est continu en t_1 :

$$\hat{x}_{t_1}((\bar{p}_e - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0) = \bar{x}. \qquad (30)$$

b. Le surplus brut marginal au plafond de pollution de consommation de la ressource non renouvelable est supérieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable : $\overline{p}_e > c_r$

Il faut distinguer ici deux sous-cas.

b.1 Le surplus brut marginal de la consommation du flux contraint de la ressource non renouvelable augmenté du flux disponible de ressource renouvelable est inférieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable : $\overline{p}_{er} < c_r$

La situation est illustrée à la Figure 4. Puisque $\overline{p}_e > c_r$, lorsque l'utilisation de la ressource non renouvelable est limitée par la contrainte de plafonnement du stock de polluant, la société peut et doit utiliser la ressource renouvelable. Mais puisque $\overline{p}_{er} < c_r$, cela ne peut pas intervenir avant la date à laquelle le surplus marginal de la consommation est égal à c_r. Il en résulte que l'utilisation de la ressource renouvelable commence précisément à cette date et qu'à celle-ci le plafond de concentration doit être juste atteint. De plus, pendant la phase durant laquelle le stock de polluant reste à son niveau maximum $\overline{Z}$, $\overline{p}_{er} < c_r$ implique que la totalité du flux de ressource renouvelable n'est pas utilisée.

Le sentier optimal comprend quatre phases. Durant la première phase les usagers ne sont approvisionnés que par la ressource non renouvelable : $q_t = \widehat{x}_t\left(\lambda, \mu\right)$. Cette phase doit se terminer à la date t_1 à laquelle $c_e + \lambda_0 e^{\rho t} - \zeta \mu_0 e^{(\rho+\alpha)t} = c_r$. A cette date le plafond de polluant $\bar{Z}$ est atteint. Puisque $\tilde{y} < \bar{x} + \bar{y}$, la phase suivante est une phase durant laquelle $q_t = \tilde{y}, x_t = \bar{x}$ et $y_t = \tilde{y} - \bar{x} < \bar{y}$. En t_2 la quantité consommée de ressource non renouvelable chute, de $\bar{x}$ à $\tilde{y} - \bar{y}$. A la date $t_3, \tilde{x}_{t_3}(\lambda_0) = \bar{y}$ de sorte que $x_t = 0$. Pendant la dernière phase $[t_3, +\infty)$ la société n'est plus approvisionnée que par la ressource renouvelable, $q_t = \bar{y}$.

Figure 4 ici

Les sentiers sont construits comme suit. Considérons la dernière phase pendant laquelle la ressource non renouvelable est utilisée, la phase $[t_2, t_3)$ de durée δ_3. Au cours de cette phase $\lambda_t = (c_r - c_e)e^{-\rho(t_2 - t)}$ et $x_t = \tilde{x}_t((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0) - \bar{y}$. La quantité de ressource non renouvelable utilisée pendant cette période, $X_{(3)}$, est égale à :

$$X_{(3)} = \int_{t_2}^{t_3} \tilde{x}_t((c_r - c_e)e^{-\rho t_2})dt - \bar{y}[t_3 - t_2] = \int_0^{\delta_3} \tilde{x}_t(c_r - c_e)dt - \bar{y}\delta_3, \quad (31)$$

$$\text{où} \quad t_3 = t_2 + \delta_3 \quad \text{et} \quad \delta_3 = \rho^{-1}[\log(\bar{p}_r - c_r) - \log(c_r - c_e)]. \quad (32)$$

Durant la première phase $[0, t_1)$ au cours de laquelle la seule ressource non renouvelable est utilisée et le plafond de polluant n'est pas encore atteint, on doit avoir $x_t = \hat{x}_t((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0)$ où μ_0 est à déterminer.

Il reste finalement à déterminer les trois inconnues t_1, t_2 et μ_0. Pour cela on dispose des trois équations suivantes :

i- demande cumulée épuisant le stock de ressource non renouvelable :

$$\int_0^{t_1} \hat{x}_t((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0)dt + \bar{x}[t_2 - t_1] = X_0 - X_{(3)} \ ; \tag{33}$$

ii- plafond de pollution atteint en t_1 :

$$\hat{Z}_{t_1}((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0) = \bar{Z} \ ; \tag{34}$$

iii- continuité du sentier de consommation en t_1 :

$$\hat{x}_{t_1}((c_r - c_e)e^{-\rho t_2}, \mu_0) = \tilde{y}. \tag{35}$$

b.2 Le surplus brut marginal de la consommation du flux contraint de la ressource non renouvelable augmenté du flux disponible de ressource renouvelable est supérieur au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable : $\overline{p}_{er} > c_r$

La situation est illustrée à la Figure 5. La différence avec le sous-cas précédent est qu'ici la date à laquelle $c_e + \lambda_0 e^{\rho t} - \zeta\mu_0 e^{(\rho+\alpha)t}$ atteint la valeur c_r, que l'on note t_1, précède celle à laquelle elle atteint la valeur $\overline{p}_{er}$, que l'on note t_2, et donc la société doit utiliser la ressource renouvelable avant que la plafond de pollution soit atteint. Le sentier optimal comprend donc ici cinq phases. Au cours de la première, $[0, t_1)$, seule la ressource non renouvelable approvisionne les usagers au taux $\hat{x}(\lambda_0, \mu_0)$. En t_1 le taux d'utilisation de la ressource non renouvelable fait une chute d'amplitude $\bar{y}$ compensée par la mise en exploitation de la ressource renouvelable au taux maximum $y_t = \bar{y}$. Au cours de la seconde phase, $[t_1, t_2), q_t = \hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0), x_t = \hat{x}_t(\lambda_0, \mu_0) - \bar{y}$ et $y_t = \bar{y}$. Le plafond de pollution est atteint en t_2. Au cours de la troisième phase $[t_2, t_3)$ la ressource non renouvelable est utilisée au taux maximum permis par le respect du plafond, $x_t = \bar{x}$, et la ressource renouvelable est utilisée au taux maximum permis par les disponibilités, $y_t = \bar{y}$. La consommation de ressource non renouvelable décroît pendant la quatrième phase $[t_3, t_4)$, de $x_{t_3} = \bar{x}$ à $x_{t_4} = 0$, au cours de laquelle $q_t = \tilde{x}_t(\lambda_0), x_t = \tilde{x}_t(\lambda_0) - \bar{y}$ et $y_t = \bar{y}$. En t_4 la ressource non renouvelable est épuisée et au cours de la dernière phase $[t_4, +\infty)$ la société consomme la seule ressource renouvelable, $q_t = y_t = \bar{y}$.

Figure 5 ici

Le sentier optimal est construit comme suit. Au cours de la dernière phase d'utilisation de la ressource non renouvelable la rente minière unitaire doit être égale à $\lambda_t = (\overline{p}_{er} - c_e)e^{-\rho(t_3-t)}$ et $x_t = \tilde{x}((\overline{p}_{er} - c_e)e^{-\rho t_3}) - \bar{y}$. La quantité de ressource non renouvelable consommée au cours de cette quatrième période, $X_{(4)}$, est donc égale à :

$$X_{(4)} = \int_{t_3}^{t_4} \tilde{x}((\overline{p}_{er} - c_e)e^{-\rho t_3})dt - \bar{y}[t_4 - t_3] = \int_0^{\delta_4} \tilde{x}_t(\overline{p}_{er} - c_e)dt - \bar{y}\delta \tag{36}$$

$$\text{où :}\quad t_4 = t_3 + \delta_4 \quad \text{et} \quad \delta_4 = \rho^{-1}[\log(\bar{p}_{er} - c_e) - \log(\bar{p}_r - c_e)]. \tag{37}$$

Au cours des deux premières périodes $Z_t < \bar{Z}$ et donc $\nu_t = 0$. Pour que les conditions de premier ordre (7) et (8) soient satisfaites il est nécessaire que $x_t = \hat{x}_t((\bar{p}_{er} - c_e)e^{-\rho t_3}, \mu_0)$ et $y_t = 0, t \in [0, t_1)$ et que $x_t = \hat{x}_t((\bar{p}_{er} - c_e)e^{-\rho t_3}, \mu_0) - \bar{y}$ et $y_t = \bar{y}, t \in [t_1, t_2)$ où μ_0 est à déterminer.

Il faut déterminer ici les valeurs de quatre inconnues : t_1, t_2, t_3 et μ_0. Elles sont la solution du système des quatre équations suivantes :

i- égalité de la demande cumulée et de l'offre de ressource non renouvelable :

$$\int_0^{t_2} \hat{x}_t((\bar{p}_{er} - c_e)e^{-\rho t_3}, \mu_0)dt - \bar{y}[t_2 - t_1] + \bar{x}[t_3 - t_2] = X^0 - X_{(4)} \;; \tag{38}$$

ii- en t_1 le coût marginal généralisé de la ressource non renouvelable doit être égal à celui de la ressource renouvelable :

$$c_e + (\bar{p}_{er} - c_e)e^{-\rho(t_3 - t_1)} - \zeta\mu_0 e^{(\rho+\alpha)t_1} = c_r \;; \tag{39}$$

iii- en t_2 le stock de polluant doit avoir atteint sa valeur plafond :

$$Z_{t_2}((\bar{p}_{er} - c_r)e^{-\rho t_3}, \mu_0) = \bar{Z}, \tag{40}$$

où $Z_t((\bar{p}_{er} - c_r)e^{-\rho t_3}, \mu_0)$ est le stock de polluant, partant de Z^0 en $t = 0$, engendré par $\hat{x}_t((\bar{p}_{er} - c_r)e^{-\rho t_3}, \mu_0)$ sur l'intervalle $[0, t_1)$ et par $\hat{x}_t((\bar{p}_{er} - c_r)e^{-\rho t_3}, \mu_0) - \bar{y}$ sur l'intervalle $[t_1, t_2)$;

iv- le sentier de consommation est continu en t_2 :

$$\hat{x}_{t_2}((\bar{p}_{er} - c_e)e^{-\rho t_3}, \mu_0) - \bar{y} = \bar{x}. \tag{41}$$

En conclusion de cette section, il faut d'abord noter que, si la ressource renouvelable est rare, il existe toujours une phase d'exploitation simultanée des deux ressources. Il faut donc toujours débuter l'exploitation d'une ressource relativement coûteuse avant d'avoir épuisé la ressource la meilleur marché. Cette phase d'utilisation de la ressource coûteuse ne doit débuter qu'assez tard si le plafond de pollution est élevé. La raison en est qu'alors les restrictions imposées à l'utilisation de la ressource bon marché sont minimes, la perte de surplus brut est peu élevée et ne justifie pas que la société supporte le différentiel de coût qu'impliquerait l'exploitation de la ressource renouvelable, seul moyen dont elle dispose pour relâcher la contrainte en question. Si au contraire la plafond de pollution est bas, ces restrictions sont conséquentes et la perte de surplus brut qu'elles impliquent est supérieure au différentiel de coût. Il faut donc utiliser la ressource coûteuse dès que la contrainte est active, c'est-à-dire dès que le plafond de pollution est atteint. Si de plus la ressource renouvelable est très rare, c'est-à-dire si le flux disponible est minime, le dessèrement de la contrainte qui limite l'usage de la ressource non renouvelable reste modéré. Retarder la date à laquelle le plafond de pollution sera atteint devient alors une priorité et il faut pour ce faire, commencer à utiliser la ressource renouvelable avant que le plafond soit atteint.

5 Conclusion

Il reste à discuter des moyens d'intervention requis pour que la contrainte de plafond de polluant à ne pas dépasser soit respectée. Les deux modes classiques d'intervention quotas ou permis d'une part, et taxes d'autre part, peuvent être utilisés ici.

La taxe qu'il faudrait imposer doit être égale à $-\zeta\mu_t$ si son assise est l'unité de ressource non renouvelable, ou $-\mu_t$ si son assise est l'unité de matière polluante rejetée. Cette taxe a le même profil temporel dans tous les cas étudiés. Elle doit d'abord croître à un taux constant $\rho+\alpha$, tant que la limite $\bar{Z}$ qu'on ne veut pas franchir n'est pas atteinte. Elle décroît ensuite progressivement sur l'intervalle de temps pendant lequel la consommation de la ressource non renouvelable est contrainte par la condition $\bar{Z} - Z_t \geq 0$, pour s'annuler à la fin de cette période, et elle reste nulle ensuite même si à l'issue de la période en question la ressource n'est pas épuisée. La raison en est que la consommation de la ressource polluante sera alors si modeste que le plafond ne sera jamais plus atteint.

L'autre mode de régulation consisterait à imposer des quotas de consommation ou à instaurer des permis d'émission. Ces quotas et ces permis devraient être des permis donnant droit à une utilisation instantanée. La quantité de quotas unitaires de consommation à l'instant t devrait être égale à x_t la quantité optimale de ressource polluante qui doit être consommée à cet instant et le prix de chaque quota devrait être égal à $-\zeta\mu_t$. Si les permis sont des permis donnant droit à rejeter des polluants, alors le nombre de permis unitaires devrait être égal à ζx_t et le prix $-\mu_t$. Vendre des quotas ou des permis n'est ici qu'une forme déguisée de taxation.

Références

[1] Amigues, J.P., P. Favard, G. Gaudet et M. Moreaux (1997-a), "Ressources naturelles et ordre optimal d'exploitation", *Revue d'Economie Politique*, **107**, 205–30.

[2] Amigues, J.P., P. Favard, G. Gaudet et M. Moreaux (1997-b), "De l'usage optimal des divers types de ressources naturelles", *Annales d'Economie et de Statistique*, n.48, 147–89.

[3] Amigues, J.P., P. Favard, G. Gaudet et M. Moreaux (1998), "On the optimal order of natural resource use when the capacity of the inexhaustible sutstitute is constrained", *Journal of Economic Theory*, **80**, 153–70.

[4] Amigues, J.P. et M. Moreaux (2002), "On the equilibrium order of exploitation of the natural resources", *mimeo*, LEERNA-Université de Toulouse 1.

[5] Chakravorty, U. et D.L. Krulce (1994), "Heterogenous demand and order of resource extraction", *Econometrica*, **62**, 1445–52.

[6] Chakravorty, U., D.L. Krulce et J. Roumasset (2003), "Non renewable resource extraction under heterogeneous demand : Ricardo meets Ricardo", *mimeo*, Emory University, Atlanta, GA.

[7] Chakravorty, U., B. Magné et M. Moreaux (2003-a), "Plafond de concentration atmosphérique en carbone et substitutions entre ressources énergétiques", *mimeo*, LERNA-Université de Toulouse I.

[8] Chakravorty, U., B. Magné et M. Moreaux (2003-b), "From coal to clean energy : Hotelling with a limit on the stock of externalities", *mimeo*, LEERNA-Université de Toulouse I.

[9] Gaudet, G., M. Moreaux et S. Salant (2001), "Intertemporal depletion of resource sites by spatially distributed users", *American Economic Review,* **91**, 1149-59.

[10] Herfindhal, O. L. (1967). "Depletion and economic theory", in M. Gaffney, ed., *Extractive Resources and Taxation*, Madison : University of Wisconsin Press, 63-90.

[11] Hotelling, H. (1931). "The economics of exhaustible resources", *Journal of Political Economy*, **39(2)**, 137-75.

[12] Kemp, M.C. et N.V. Long (1980-a), "On two folk theorems concerning the extraction of exhaustible resource", *Econometrica*, **48**, 663-73.

[13] Kemp, M.C. et N.V. Long (1980-b), "On the optimal order of exploitation of deposits of an exhaustible resource", in M.C. Kemp and N.V. Long, ed., *Exhaustible Resources, Optimality and Trade*, Amsterdam : North-Holland, 31-9.

[14] Kemp, M.C. et N.V. Long (1984), "Toward a more general theory of the order of exploitation of non-renewable resource-deposits", in M.C. Kemp and N.V. Long, ed., *Essays in the Economics of Exhaustible Resources*, Amsterdam : North-Holland, 39-74.

[15] Lewis, T.R. (1982), “Sufficient conditions for extracting least cost resources first”, *Econometrica*, **50**, 1081-3.

[16] Rouillon, S. (2000), “Catastrophe climatique et politique de l’effet de serre”, *Annales d’Economie et de Statistique*, **59**, 165-75.

[17] Tahvonen, O. (1997), “Fossil fuels, stock externalities, and backstop technology”, *Canadian Journal of Economics*, **30**, 855-74.

[18] Wrigley, E.A. (1998), *Continuity, Chance and Change*, Cambridge : Cambridge University Press.

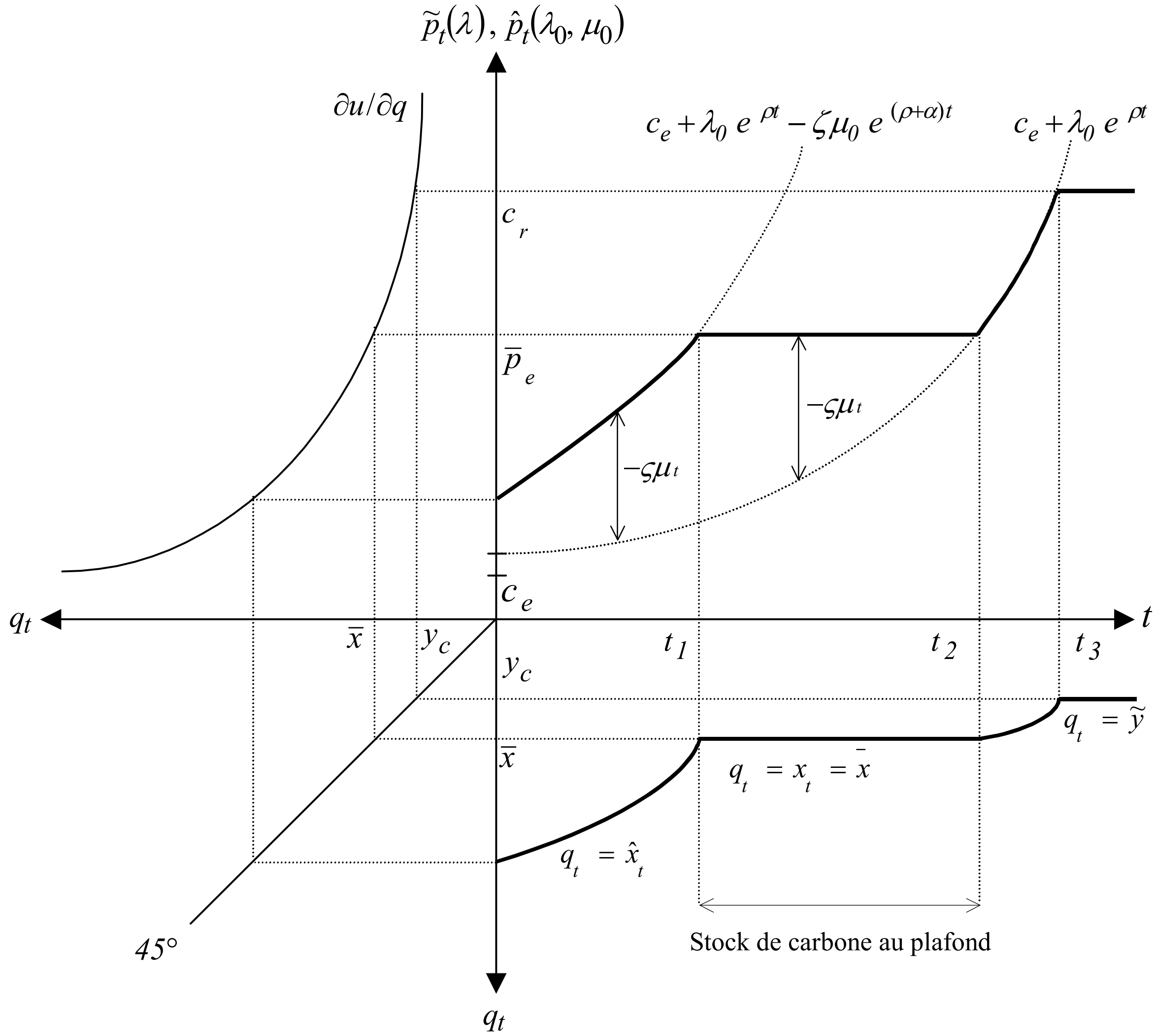

FIG. 1: Cas d'une ressource renouvelable abondante et d'un plafond de pollution élevé : $\overline{p}_e < c_r$.

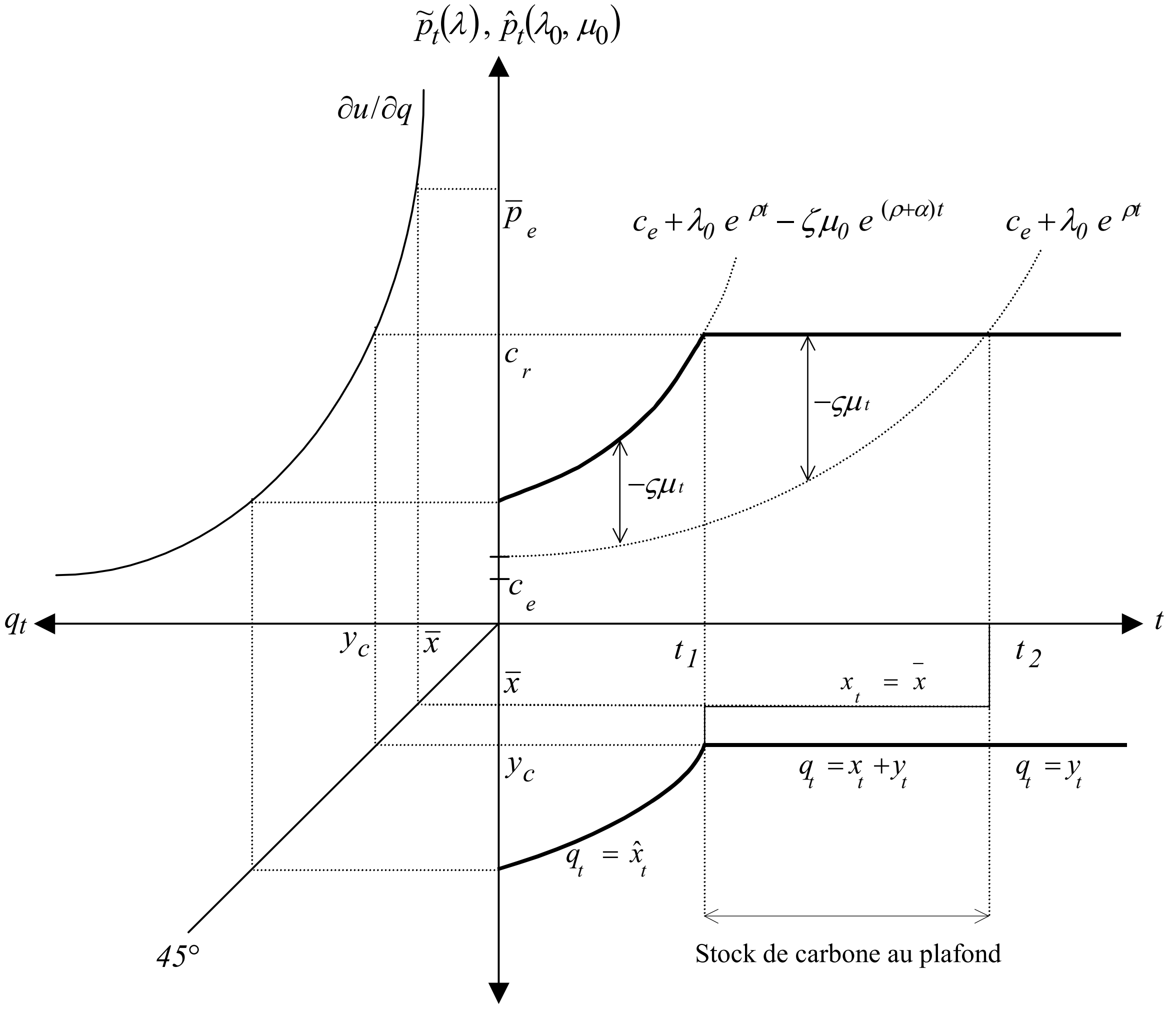

FIG. 2: Cas d'une ressource renouvelable abondante et d'un plafond de pollution bas : $\overline{p}_e > c_r$.

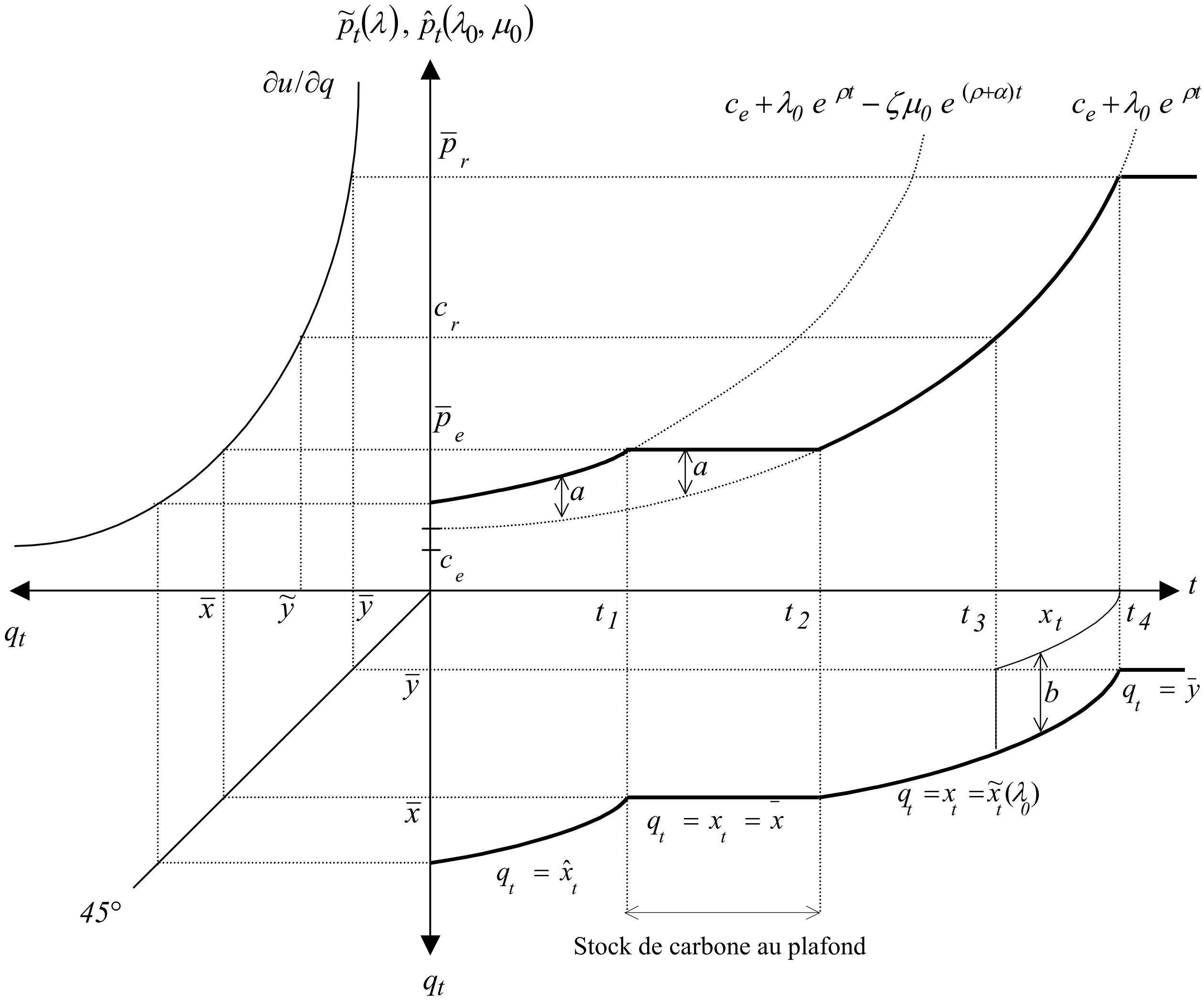

Fig. 3: Cas d'une ressource renouvelable rare et d'un plafond de pollution élevé : $\overline{p}_e < c_r$. ($a = -\zeta\mu_t; b = q_t - x_t = \overline{y}$)

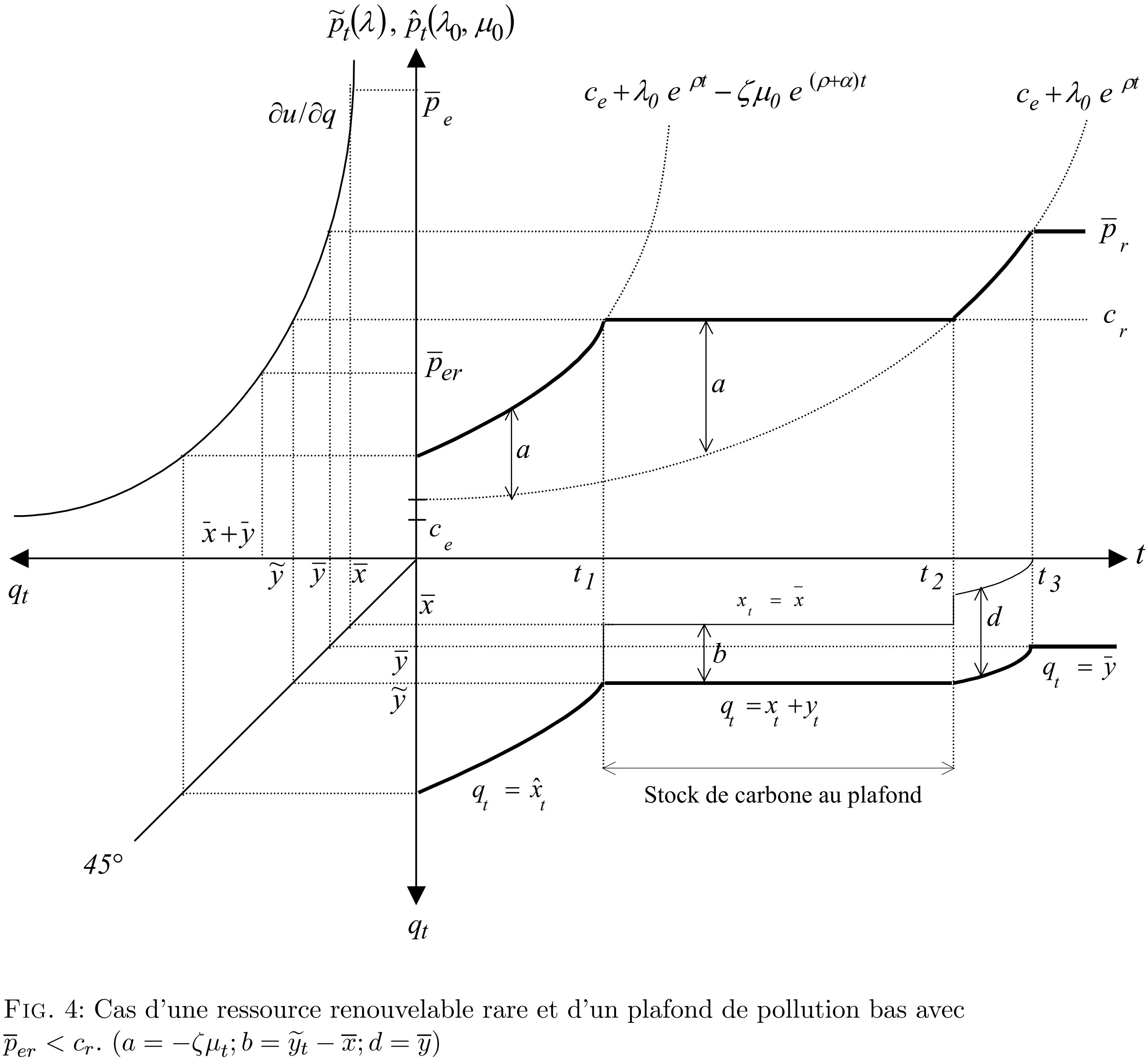

FIG. 4: Cas d'une ressource renouvelable rare et d'un plafond de pollution bas avec $\overline{p}_{er} < c_r$. ($a = -\zeta\mu_t; b = \widetilde{y}_t - \overline{x}; d = \overline{y}$)

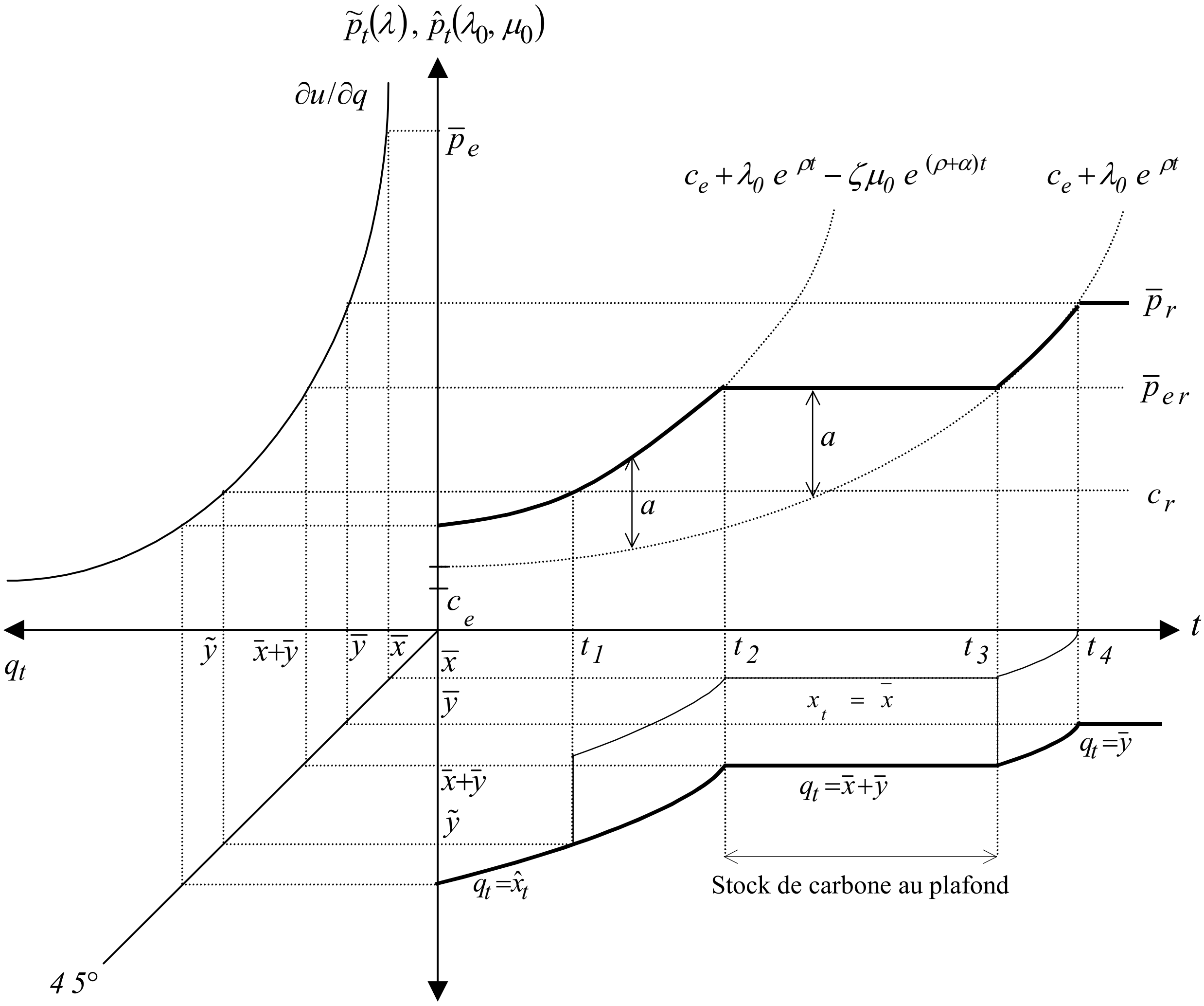

FIG. 5: Cas d'une ressource renouvelable rare et d'un plafond de pollution bas avec $\overline{p}_{er} > c_r$. ($a = -\zeta\mu_t; b = \widetilde{y}_t - \overline{x}; d = \overline{y}$)