WORKING PAPERS

N° 17-789

Mars 2017

“Alliances Electorales et Gouvernementales : La Contribution de la Théeorie des Jeux Coopéeratifs à la Science Politique"

Michel Le Breton et Karine Van der Straeten

Toulouse School of Economics

Alliances Electorales et Gouvernementales : La Contribution de la Théorie des Jeux Coopératifs à la Science Politique*

Michel Le Breton† Karine Van der Straeten‡

Février 2017

"Les rapports juridiques entre alliés sont moins intéressants que les rapports de force."
Maurice Duverger, *Les Partis Politiques*, Chapitre 7, Armand Colin, 1954

Abstract

L'objet de cet article est d'offrir une présentation synthétique des principaux travaux théoriques et empiriques portant sur la formation des coalitions électorales et gouvernementales et utilisant comme socle méthodologique la théorie des jeux coopératifs avec ou sans utilité transférable.

1 Introduction

Cet article est une visite guidée des principales contributions consacrées à l'analyse de la formation des alliances électorales et gouvernementales et partageant comme socle méthodologique la théorie des jeux coopératifs. Le postulat fondamental de cette étude est que les coalitions politiques ont un pouvoir supérieur à la somme des pouvoirs de leurs membres. Comprendre pourquoi et comment se forment des coalitions dans le jeu politique est un sujet qui occupe une place importante dans le champ de la science politique contemporaine. Plusieurs traités fondamentaux ont été consacrés à ces questions, au nombre desquels ceux de De Swann (1973) et Riker (1962).

Du point de vue substantiel, cet article se propose d'examiner les questions suivantes. Pourquoi et comment se forment les gouvernements de coalition, c'est à dire les gouvernements parlementaires constitués par des membres de plusieurs partis qui ont accepté de

*Nous remercions Peter Sudhölter de ses réponses fouillées à certaines questions que nous lui avons posées dans le cadre de la préparation de cet article.

†Toulouse School of Economics et Institut Universitaire de France.

‡Toulouse School of Economics et CNRS. Van der Straeten remercie l'ANR-Labex IAST pour son soutien.

coopérer[1]? Peut-on prédire leur taille, leur composition ainsi que leur programme politique et la répartition des portefeuilles ministériels ? Pourquoi et comment plusieurs partis ou candidats décident-ils de former des alliances avant ou pendant une élection et non pas après ? Comment les partenaires au sein de ces alliances partagent-ils les gains d'une telle coopération ? En particulier, pour ce faire, suivent-ils des normes ou principes inspirés d'une forme de justice ou se livrent-ils au contraire à des marchandages exploitant leurs rapports de force ?

Dans son célèbre traité, Duverger (1954) écrit[2] : *"Les alliances entre partis ont des formes et des degrés très variables.* Certaines sont éphémères et inorganisées : simples coalitions provisoires pour bénéficier d'avantages électoraux, pour renverser un gouvernement ou le soutenir occasionnellement. D'autres sont durables et pourvues d'une solide armature, qui les fait ressembler parfois à un super-parti". Il reconnaît que le sujet est complexe : "La classification des alliances est délicate : on se trouve ici sur un terrain vague et mouvant. Il faudrait distinguer d'abord les coalitions occasionnelles et éphémères, et les alliances proprement dites, plus durables... On emploiera donc simultanément les termes de coalition et d'alliance, étant entendu que le premier sera plutôt réservé aux ententes occasionnelles, le second aux unions durables. Les classifications fondamentales des alliances se basent sur d'autres critères. Sur le plan vertical, on peut opposer d'abord les *alliances électorales*, les *alliances parlementaires* et les *alliances gouvernementales*. Les premières se situent au niveau des candidats, les secondes au niveau des députés, les troisièmes au niveau des ministres. Les unes et les autres peuvent coexister ou se manisfester isolément". Dans notre article nous ne ferons aucune différence entre les mots coalition et alliance. La coalition est un classique de la vie politique de nombreuses démocraties à l'exception sans doute du Royaume-Uni et de la France depuis l'avènement de la 5$^{\text{ème}}$ République. Cette pratique est pourtant fort honorable[3]. *Son étymologie ne signifie t-elle pas "grandir ensemble"* ? En France, le mot a souvent une connnotation péjorative : on trouve jusqu'au milieu du dix-neuvième siècle un *"délit de coalition"*[4] !

Dans notre article, nous retenons en revanche la distinction que fait Duverger entre les alliances électorales (qui se forment avant les élections) et les alliances gouvernementales, qui se forment une fois le Parlement élu. Dans son analyse des facteurs d'alliance, Duverger met en avant le rôle prépondérant du nombre de partis et du régime électoral sur la formation des alliances. Il note qu'en régime bipartisan elles sont tout à fait exceptionnelles alors qu'inversement, les régimes multipartisans ne peuvent qu'exceptionnellement se passer d'alliances.[5] Dans notre article également, nous insisterons à diverses reprises sur

[1]La raison habituelle d'un tel arrangement est qu'aucun parti seul n'a suffisamment de députés pour constituer une majorité au parlement.

[2]Il aborde la question des alliances dans la troisième section de son second chapitre.

[3]Voir le billet d'humour d'Etienne de Montety intitulé "Coalition" dans l'édition du journal *Le Figaro* datée du 24 Septembre 2013.

[4]Le délit de coalition est institué par la loi Le Chapelier du 14 juin 1791 qui interdit les rassemblements ouvriers et paysans, après l'abrogation des corporations par le décret d'Allarde des 2 et 17 mars 1791. Il est abrogé par la loi Ollivier du 25 mai 1864.

[5]Il écrit: "Elle est d'ailleurs suffisamment nette pour qu'on puisse la synthétiser en formules précises. En principe le scrutin majoritaire à deux tours tend à l'établissement d'alliances étroites; la représentation

l'importance du régime électoral pour expliquer la formation d'alliances.

Du point de vue méthodologique, nous allons nous appuyer sur un cadre analytique dérivé de la théorie des jeux coopératifs. Modéliser le calcul stratégique conduisant à la formation de coalitions et au partage des gains de la coopération n'est pas facile et il y a de multiples façons de procéder. Un point de vue non-coopératif va privilégier une description de la négociation cadrée par un jeu sous forme normale (ou extensive) où les actions offertes aux différents joueurs sont décrites avec précision. Par exemple, si l'issue sur laquelle porte la décision est le partage d'un ensemble de portefeuilles ministériels, le protocole décrira qui est habilité à faire des propositions, à quel moment, dans quel ordre (si plusieurs joueurs peuvent faire des propositions successives), qui peut bloquer une proposition, à quel moment la négociation s'arrête, etc. Le travail consiste ensuite à caractériser les équilibres du jeu ainsi construit. Le point de vue coopératif va préférer des descriptions plus grossières comme *la fonction de partition* ou plus souvent encore la *fonction caractéristique* du jeu qui consiste à associer à chaque coalition potentielle l'ensemble des paiements qu'elle peut atteindre quelles que soient les actions entreprises par les joueurs hors de cette coalition.[6] L'avantage de cette forme plus grossière est que les prévisions d'alliance ne dépendent pas de façon trop sensible des détails du processus de négociation. Dans bien des cas, la forme extensive n'est pas une contrainte pesant sur les joueurs mais plutôt la vue du modélisateur sur le déroulement du jeu. Il est donc important que les conclusions soient robustes à des changements artificiels. Comme le note Maskin (2003, 2004): "For many years now, the cooperative side of game

proportionnelle au contraire, à une indépendance complète. Quant au scrutin majoritaire à un seul tour, ses conséquences sont très différentes suivant le nombre de partis qui y fonctionnent: en régime de bipartisme, il engendre une indépendance totale; en régime multipartiste, il incline au contraire à des alliances très fortes. La première tendance est évidente : le mécanisme même du scrutin majoritaire à deux tours implique en effet qu'au second les partis les moins favorisés se retirent au profit du plus favorisé, à l'intérieur de chaque grande famille spirituelle. On distingue le retrait pur et simple et le désistement, où le candidat qui abandonne la lutte invite ses électeurs à reporter leurs voix sur un de ses concurrents qu'il désigne nommément. Entre les deux se rencontrent mille nuances plus ou moins subtiles...mais il est naturel que les candidats s'entendent avant le scrutin pour prévoir leurs désistements ou leurs retraits réciproques au second tour". Duverger illustre son propos par des exemples empruntés à l'Allemagne impériale et à la Troisième République française. Après avoir commenté les effets nuancés du scrutin majoritaire à un seul tour, il aborde la représentation proportionnelle et écrit: "Par nature, la représentation proportionnelle est un scrutin isolateur: elle tend à conférer à chaque parti une autonomie électorale complète. Mais donnant très rarement à un seul parti la majorité absolue, elle implique malgré tout des alliances parlementaires. Cette contradiction entre le plan électoral et le plan gouvernemental n'est pas l'un des moindres défauts de la R.P. : rendant les partis totalement indépendants les uns des autres sur le premier, elle les oblige à collaborer sur le second. Normalement, cela rend plus difficile la formation des coalitions parlementaires et plus instable le destin des majorités gouvernementales". Duverger procède à une illustration de son propos appuyée sur l'histoire récente des principales démocraties de l'Europe de l'ouest utilisant un système proportionnel ou un sytème mixte. Il montre en particulier comment le système mixte allemand et la loi électorale francaise de 1919 ont entrainé des alliances au demeurant très efficaces.

[6]Dans van Damme (1998), Aumann suggère une autre façon de distinguer les deux approches. Il écrit: "Yesterday we were talking about cooperative and noncooperative game theory and I said that perhaps *a better name for cooperative would be "outcome oriented"* or "coalitional," and for noncooperative *"strategically oriented."* Game theory develops not only solution concepts that specify rational behavior of individuals, but also solution concepts that specify outcomes. *It is not just a question of behavior, but also of outcomes.*"

theory has been dominated by the noncooperative side, at least judging from their respective influence on mainstream economics. *That cooperative theory should be in relative eclipse is regrettable because this body of work offers us the opportunity to understand how coalitions behave, i.e., how subsets of players bargain over their choice of actions. Such bargaining seems basic to many aspects of economic and political life...* Noncooperative theory can be used to study these phenomena too but then it is tied to particular extensive or normal form[7]. *Cooperative theory has potential for a more general perspective*[8]".

La théorie des jeux coopératifs a développé de nombreuses solutions de marchandage que nous utiliserons pour évaluer les implications des rapports de force entre les joueurs sur le résultat final de la négociation. Ces solutions sont "institution-free" au sens de McKelvey (1986) ce qui les rend robustes mais parfois imprécises. Il ne faut pas en déduire pour autant qu'elles ignorent les caractéristiques des institutions et règles qui structurent[9] le marchandage[10]. Comme le note Austen-Smith (1996) : "*With sufficient institutional*

[7] Aumann (van Damme (1998)) va dans le même sens : "This is very very important, because in order to do game theory you would be very restrictive if you confined yourself to situations that are strategically well defined. In applications, when you want to do something on the strategic level, you must have very precise rules; for example, like in an auction. An auction is a beautiful example of this, but it is very special. It rarely happens that you have rules like that. *Cooperative theory allows the rules of the game to be much more amorphous.* If you wanted to do the Roth labor market, you could not do that noncooperatively, the rules are not sufficiently well specified. *If you wanted to do a noncooperative analysis of coalition formation, you can't do it, it is not sufficiently well specified. Who talks first, who talks second? It matters enormously in noncooperative game theory.*"

[8] Aumann (van Damme (1998)) abonde, à nouveau, dans ce sens. A la question un tantinet provocatrice "In the social sciences one presently relies nearly exclusively on noncooperative game models?" de van Damme, il répond: "But that's absolutely incorrect. I can't disagree more. There have been important analyses of noncooperative models, but as the discussion up to now has shown, many of the models that we have been talking about are cooperative and many of them are successful ones. Roth's work on labour markets is mindblowing, this is game theory at its best. *If anything, the cooperative theory has played a more important role in applications than the noncooperative theory.* Cooperative theory is actually doing quite well. I've already said in this interview that many of *the most interesting applications of game theory come from the cooperative side ... an important advantage of the cooperative theory is that it takes a broader, more fundamental view, that it is not so obsessed with procedural details; its fundamental parameters are the capabilities of players and coalitions.* Adam Brandenburger, who teaches at the Harvard Business School, has told me that the students there consider the cooperative theory a lot more relevant to business than the noncooperative theory."

[9] A la question *"Could you explain what exactly you mean by a structured situation?* Is it that there are players with well-defined objectives and well defined strategy sets, that there is perhaps even a timing of the moves? In short, is a structured situation one in which the extensive or strategic form of the game is given?" posée par van Damme (1998), Aumann répond : "No, that is not what is meant by "structured." It means something more general. A structured situation is one that is formally characterized by a limited number of parameters in some definite, clear, totally defined way. That implies that you can have a theory that makes predictions on the basis of this formal structure, and you can check how often that theory works out, and you can design a system based on those parameters. That holds for auctions, and for Roth's labor markets, and for the formation of a governmental majority in a parliamentary democracy".

[10] Comme le note Aumann (Hart (2005)): "Strategic game theory is best suited to contexts and applications where the rules of the game are precisely described, like elections, auctions, internet transactions. Coalitional game theory is better suited to situations like coalition formation or the formation of a government in a parliamentary democracy or even the formation of coalitions in international relations; or, what happens in a market, where it is not clear who makes offers to whom and how transactions are consummated.

structure on the coalition-formation process, sharp predictions can be derived about which coalitions and which policies will arise in a particular parlementary setting. Unfortunately, the predictions from such institutionally rich models tend to be highly sensitive to the institutional detail...So to provide a general explanation of coalition formation and policy outcomes in parliamentary democracies, it seems essential to look for as institutionally poor a theory as possible (although, of course, given what is known about the abstract properties of voting rules, some institutional detail is essential)" En modélisant une situation de marchandage particulière, il faut bien entendu incorporer tous les éléments utiles concernant les règles connues avec certitude et les utilités des joueurs : quels objectifs poursuivent-ils ? Comment réagissent-ils face au risque et aux délais dans la négotiation ?

Faute d'espace, il ne nous est pas possible dans cet article de rendre justice à toute l'histoire de la pensée sur ce sujet et au volumineux travail empirique qui accompagne les développements théoriques. La théorie des jeux coopératifs a été appliquée avec succès à la science politique. Les deux traités fondamentaux de De Swann et Riker évoqués plus haut ont été prolongés par de nombreux travaux théoriques et empiriques.

L'essentiel du travail a porté sur l'analyse des coalitions gouvernementales : Quelles sont-elles et comment leurs membres se partagent-ils les fruits de l'exercise du pouvoir ? Au nombre des travaux théoriques ou/et empiriques anciens les plus importants portant sur ce thème, on peut citer Axelrod (1970), Brown et Franklin (1973), Brown et Frendreis (1980), Dodd (1974), Laver et Taylor (1973), Laver et Schofield (1998), Laver et Shepsle (1996), Leiserson (1966), Peleg (1980, 1981), Schofield (1976, 1978, 1982, 1995, 2008)), Strom (1990), Warwick et Druckman (2001). Les travaux empiriques de cette époque ont été très influencés par les travaux de Gamson (1961), un sociologue qui s'est beaucoup intéressé à la formation des coalitions. S'agissant de comprendre la nature des politiques de compromis mises en place par les gouvernements de coalition, cette littérature doit beaucoup au travail indépendant mené sur le *modèle spatial* en science politique (Poole (2005), Poole et Rosenthal (2008)). En offrant une description euclidienne multivariée des préférences et actions, le modèle spatial est un bon compromis entre la nécessité de rester simple et le souhait de disposer d'un modèle suffisamment riche pour couvrir des situations, le cas échéant, plus compliquées que le sacro-saint clivage idéologique droite-gauche. Nous ferons ici usage de la théorie des jeux coopératifs dans ce cadre spatial telle qu'elle est développée dans des manuels avancés comme ceux d'Austen-Smith et Banks (1999,2005) et Schofield (2008) avec une attention particulière pour le coeur, les solutions de Von Neumann-Morgenstern et ensembles dérivés.

En contraste aux coalitions gouvernementales, les coalitions électorales ont recu une attention beaucoup moindre de la théorie des jeux coopératifs même si naturellement la question des ententes électorales et des tactiques diverses mises en place à ces occasions ont retenu[11] et continue de retenir l'intérêt des politologues appliqués. L'analyse des alliances pré-électorales par exemple est peu (ou même pas) théorique et ce qui tient lieu de théorie

Negotiations in general, bargaining, these are more suited for the coalitional, cooperative theory. The big advantage of the cooperative theory is that it does not need a precisely defined structure for the actual game. It is enough to say what each coalition can achieve; you need not say how".

[11]Voir par exemple Axelrod (1972).

se résume souvent[12] à un corps d'hypothèses qualitatives suggérées par le sens commun. L'unique exception dont nous avons connaissance est la série de travaux conduits par Rosenthal seul (1968a, 1968b, 1970, 1975) puis en collaboration avec Lee et McKelvey (1976, 1978, 1979) sur la 4ème République Française et en particulier sur la loi des apparentements. Une autre exception est notre article de 2013 (Le Breton et Van der Straeten 2013) où la théorie des jeux coopératifs est utilisée pour analyser les alliances électorales à gauche de l'échiquier entre les deux tours des élections régionales de Mars 2010.

Notre article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons le cadre d'analyse des coalitions gouvernementales et les principaux résultats théoriques et empiriques de la littérature. Dans la section 3, nous exposons un modèle général permettant d'étudier l'influence du mode de scrutin sur la nature des alliances électorales, avec une attention particulière aux deux applications françaises qui viennent d'être évoquées.[13] La section 4 est dédiée à deux compléments. D'une part, aux questions difficiles d'inférence et test statistiques des théories et des prédictions qui leur sont attachées; nous leur avons accordé une large place dans le texte même, mais il nous semblait important d'aborder directement quelques points de méthode. D'autre part, à un modèle non-coopératif qui est devenu presque canonique dans cette littérature (dû à Baron et Ferejohn (1989)) et dont on comparera les équilibres aux solutions issues des jeux coopératifs. Notre objectif dans cet article est de proposer au lecteur une perspective large sur les efforts réalisés grâce à la théorie des jeux coopératifs pour proposer des modèles structurels des alliances politiques. L'enjeu de ces modèles est de permettre de comprendre à la fois qualitativement et quantitativement comment les rapports de force façonnent le fonctionnement des coalitions, et également d'étudier l'impact de l'environnment institutionnels sur ces alliances. A l'issue de ce cheminement, nous présenteront quelques éléments de conclusion quant au caractère fructueux ou non cette démarche : le théorie fait-elle des prédictions claires ? Et le cas échéant, ces prédictions sont-elles validées empiriquement ? Un appendice contient tout ce qu'il faut savoir de la théorie des jeux coopératifs pour lire notre article[14] ainsi que des développements non traités dans le corps de l'article.

2 Alliances/Coalitions Gouvernementales

L'étude de la formation des coalitions gouvernementales est un classique de la science politique. En Europe, le Benelux, l'Islande, la Scandinavie et l'Italie font partie de toutes les

[12] Il n'y a rien entre les hypothèses et les données observables. La partie hypothético-déductive qui est l'essence même d'une théorie (qu'apprend t-on sur le visible si l'on fait telle ou telle hypothèse sur l'invisible ?) a complètement disparu.

[13] Notons que nous reprenons dans le plan de l'article cette distinction entre alliances électorales et gouvernementales, qui est commune dans la littéraure. Cette distinction, commode pour l'analyse, est néanmoins quelque peu artificielle. En effet, il est naturellement nécessaire pour comprendre les alliances électorales de faire des hypothèses sur les anticipations des joueurs concernant la formation du gouvernement.

[14] Ceci devrait suffire à rendre l'article autosuffisant. Le lecteur souhaitant en apprendre davantage trouvera dans Peleg et Sudhölter (2003) de nombeux résultats sur la construction d'un jeu coopératif à partir d'un jeu non-coopératif.

bases de données des politologues spécialistes de ces questions; mais on constate que la question se pose désormais ailleurs comme par exemple en Espagne qui vient de connaître un épisode de cette nature. En fait tous les pays dont le système électoral est proche de la proportionnelle pure sont exposés à la nécessité de devoir gouverner à plusieurs tant le mulipartisme fragmente l'espace politique. La France d'aujourd'hui n'est pas à proprement parler dans ce schéma même si les majorités présidentielles et/ou de gouvernement peuvent comprendre plusieurs partenaires d'appoint.

Dans cette section, nous allons donc nous concentrer sur l'environnement stratégique décrivant une démocratie parlementaire au lendemain d'élections législatives. La question primordiale dans ce contexte post-électoral est celle de la formation d'un nouveau gouvernement. Les pratiques constitutionnelles et/ou historiques structurant la formation du nouveau gouvernement suggèrent que la théorie des jeux non-coopératifs peut être l'outil adéquat pour modéliser l'interaction entre les acteurs. En effet, force est de reconnaître que même si quelques règles limitent, ici et là, l'éventail des possibilités stratégiques, le processus de négotiation reste largement non structuré. Pour aborder la question de la formation du gouvernement à l'aide de la théorie des jeux coopératifs, nous allons tout d'abord introduire les principaux inputs qui sont les briques de notre modèle théorique prédictif et décrire les outputs de celui-ci. Dans une seconde sous-section, nous exposons les théories ayant comme ambition de prédire la nature des coalitions gouvernementales sur la base des caractéristiques des joueurs participant au jeu politique. Puis, nous explorons les modèles permettant d'analyser le programme mis en oeuvre par une coalition gouvernementale. Enfin, nous terminons par un exposé des principales analyses concernant la répartition des portefeuilles ministériels entre les membres de la coalition gouvernementale.

2.1 Notations et Principaux Inputs et Outputs

Au terme des élections, l'ensemble des partis politiques représentés dans le parlement est noté $N = \{1, 2, ..., n\}$ (par commodité d'écriture, chacun des n partis est donc identifié ici par un numéro et non par son nom). On attire l'attention sur le fait que nous supposons ici que les joueurs sont les partis et non les parlementaires eux mêmes. Il est donc implicitement admis que les partis sont très disciplinés et que leurs représentants suivent les instructions de leurs leaders. Nous reviendrons sur cette hypothèse (commune à toute la littérature sur ce sujet) car rien n'interdirait d'introduire dès maintenant un indicateur pour chaque parti mesurant l'intensité de sa discipline interne. Chaque parti i est décrit par deux inputs:

- Le premier input est *le nombre de parlementaires* affiliés à ce parti : ce nombre entier est noté w_i;

- Le second input est *l'idéologie ou la politique idéale* de ce parti. Conformément à la pratique du modèle spatial qui domine la science politique formelle, une idéologie ou une politique est décrite comme un vecteur dans un espace Euclidien $\mathbb{R}^{>}$. Chacune des m dimensions de cet espace est supposée représenter la réponse quantitative ou qualitative (si la variable ne prend que des valeurs discrètes) à une question importante touchant à l'organisation de la société. L'idéologie du parti i, notée θ_i, soulève plusieurs problèmes d'interprétation. Tout d'abord, si ces idéologies sont des points de référence généraux décrivant le positionnement de ces partis, la question se pose en effet de savoir comment le vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ des idéologies est transformé en une politique (c'est à dire mis en oeuvre) selon que les différents partis participent ou non au pouvoir.[15] Si, dans une interprétation différente, le vecteur θ_i représente l'engagement programmatique du parti i au moment des élections, la question se pose de savoir quelle crédibilité il faut accorder à ces promesses et ce qu'il adviendra de celles-ci si ce parti ne peut pas exercer seul le pouvoir.

En résumé, chaque parti $i \in N$ est donc décrit par un vecteur $(w_i, \theta_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{\gtrdot}$.

Les outputs, que nous souhaitons examiner sur la base de ces inputs peuvent être articulés autour de trois questions:

1. *Question 1* : Quel gouvernement S va voir le jour ?[16]
2. *Question 2* : Comment les membres du gouvernement vont-ils se répartir les portefeuilles ministériels ?[17] Nous supposerons ici qu'il y a K portefeuilles ministériels d'égale valeur : par conséquent un partage est un vecteur y dans le simplexe[18]

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} z_i = K \right\}$$

   Le gouvernement S est donc le sous-ensemble $\{i \in N : y_i > 0\}$.
3. *Question 3* : Quelle politique $x \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$ sera mise en oeuvre par le gouvernement S ?

Pour aborder ces questions, il nous reste à définir l'utilité $U_i\,(x, y)$ du joueur i pour tout $i \in N$. Nous supposerons ici que :

$$U_i\,(x, y) = \alpha y_i + \beta v_i(x) \tag{1}$$

où α et β sont des paramètres positifs désignant les poids des deux composantes de l'utilité[19] et v_i est une fonction supposée maximale en $x = \theta_i$ (Le modèle spatial peut être plus ou moins général suivant la classe de fonctions v considérées. L'hypothèse la plus contraignante suppose que $v_i(x)$ est une fonction décroissante de la distance euclidienne $\|x - \theta_i\|$ entre x et θ_i). Cette spécification[20] met en évidence les deux principales motivations généralement

[15] On pourrait de manière extrêmement générale retenir un modèle en forme réduite Ψ qui transformerait tout gouvernement de coalition $S \subset N$ et vecteur $\theta \in \mathbb{R}^{\ltimes \gtrdot}$ en une politique $x = \Psi\,(S, \theta) \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$: cette forme générale est suffisamment flexible pour distinguer l'influence d'un parti suivant qu'il participe ou non au pouvoir et permettre à un parti de l'opposition d'avoir, le cas échéant, une influence sur la politique mise en oeuvre.

[16] Autrement dit : *"Who Gets In?"*, pour reprendre le titre du chapitre 5 de Laver et Schofield (1990).

[17] Autrement dit : *"Who Gets What?"*, pour reprendre le titre du chapitre 7 de Laver et Schofield (1990).

[18] On ignore ici le fait que les variables ne prennent que des valeurs entières.

[19] Par exemple, Laver et Schofield distinguent explicitement les "office payoffs" des "policy payoffs".

[20] Il ne faut pas s'attarder sur la forme additive particulière retenue ici car ce modèle peut être généralisé sans difficulté aucune.

attribuées aux partis politiques. La première ("Office-Seeking") met l'accent sur l'objectif downsien[21] de conquête du pouvoir et des bénéfices directs qui lui sont associés, réduits ici aux postes ministériels. La seconde décrit, quant à elle, la motivation idéologique, c'est à dire le désir du parti ("Policy-seeking") de mettre en place une politique conforme à ses objectifs et aux intérêts qu'il représente.

A notre connaissance, aucun article n'analyse le problème de la formation des coalitions gouvernementales dans un contexte où les deux composantes de la fonction d'utilité des partis sont prises en compte. Les auteurs se sont limités aux deux cas polaires et dans la suite de cet exposé nous ferons de même, c'est à dire que nous modéliserons les gains à la coopération soit sur la base des portefeuilles ministériels soit sur la base de la politique mise en oeuvre. Les partis qui forment une coalition gouvernementale se partagent les portefeuilles et mettent en oeuvre une politique.

Nous n'allons pas modéliser ici les détails du processus de la décision publique et en particulier les influences respectives des partis au gouvernement et de ceux de l'opposition. Nous allons supposer ici qu'un gouvernement S est *viable* si et seulement si les partis présents dans le gouvernement contrôlent une majorité de voix dans le parlement, c'est dire si:

$$\sum_{i \in S} w_i > \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2} \tag{2}$$

Les gains à la coopération[22] découlent immédiatement de ces hypothèses. Si aucun parti ne contrôle à lui tout seul le parlement, il est dans son intérêt de coopérer avec d'autres partis pour, ce faisant, encaisser les gains résultant de l'exercise du pouvoir et de la participation au gouvernement. Une condition nécessaire à l'efficacité de la coopération porte donc sur le poids (la taille) de la coalition: elle se doit de réunir assez de membres pour être dépasser le quota q.

Cette condition n'est pas forcément suffisante. Lorsque nous laisserons de côté l'aspect programmatique pour nous concentrer sur la motivation downsienne, nous introduirons parfois de manière exogène l'éloignement idéologique comme une possible barrière à la coopération. Le sens commun suggère en effet que la distance idéologique peut compliquer le travail en commun. Certains auteurs ont donc ajouté à la clause majoritaire une condition de viabilité qui exprime, sous une forme ou sous une autre, la nécessité d'une certaine homogénéité idéologique de la coalition. D'autres critères que l'idéologie peuvent entrer en ligne de compte pour restreindre l'univers des coalitions viables même si les arguments pour justifier ces restrictions ne sont pas toujours explicités. Nous noterons W l'ensemble des coalitions majoritaires (c'est à dire satisfaisant la condition (2)) et W^* le sous-ensemble de W constitué des coalitions de W passant avec succès le ou les test(s) de restriction.

[21] Downs (1957) fut l'un des tous premiers politologues à modéliser les partis politiques comme des acteurs purement opportunistes ayant comme seul objectif la conquête du pouvoir.

[22] En d'autres termes *"What are the stakes?"* pour reprendre le titre du chapitre 3 de Laver et Schofield (1990).

Dans le cas où la seule motivation est la motivation downsienne, le *jeu coopératif à utilité transférable* (TU) sur N est décrit par la fonction caractéristique V suivante :

$$V(S) = \begin{cases} K \text{ si } S \in W^* \\ 0 \text{ si } S \notin W^* \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous normaliserons à 1 la valeur de K. Les rapports de force et les gains à la coopération sont décrits par un jeu coopératif à utilité transférable où la monnaie d'échange/numéraire est constitué des portefeuilles ministériels. Pour quelques définitions et résultats sur les jeux coopératifs TU qui seront utiles dans la suite de l'article, nous renvoyons le lecteur à l'appendice 1. Outre d'être à utilité transférable, ce jeu coopératif a une une singularité importante : la fonction caractéristique est dichotomique, dans le sens où les coalitions sont soient gagnantes, soient perdantes, sans nuance entre les deux. Pour ces jeux, appelés *jeux simples,* et auxquels est consacré l'appendice 2, la suradditivité qui mesure les gains à la coopération est d'une nature singulière dans le sens où elle est épuisée au delà d'une certaine taille.

Dans le cas polaire où les partis s'intéressent exclusivement à la politique mise en place, le jeu coopératif se présente sous une forme différente. Dans cet article nnous supposerons que la seconde composante de (1) prend la forme suivante :

$$v_i(x) = C - \|x - \theta_i\|$$

où C est une constante positive suffisamment grande. Dans la même logique que ci-dessus, les gains à la coopération se traduisent par le fait que pour former un gouvernement stable il faut que la politique mise en place par ce gouvernement ne soit pas rejetée par une majorité dans l'assemblée. On obtient cette fois un *jeu coopératif à utilité non transférable* (NTU) dont la fonction caractéristique V est définie comme suit :

$$V(S) = \begin{cases} \{U \in \mathbb{R}^S : \exists x \in X \text{ tel que } U_i(x) \leq U_i \text{ pour tout } i \in S\} \text{ si } S \in W^* \\ \mathbb{R}_- \text{ si } S \notin W^* \end{cases}$$

Notons que la normalisation retenue pour décrire les vecteurs d'utilités réalisables par les coalitions non gagnantes est arbitraire mais sans conséquence pour les analyses qui suivent dès l'instant où $V(S)$ ne contient aucun vecteur d'utilité attaché à une alternative dans X. Le jeu est de nouveau dichtomique: une fois le profil fixé, le jeu V est entièrement déterminé par le jeu simple $(N, \mathcal{W})$.

Il est utile de conclure cette section par quelques données factuelles et commentaires généraux informant le lecteur des limites de l'exercice. Notons tout d'abord que la notion de viabilité considérée ici ne permet pas de légitimer les gouvernements minoritaires. Cependant, ceux-ci sont loin d'être une exception comme l'illustre les tableaux ci-dessous:

Insérer tableau 4.2 de Laver et Schofield 1990 ici

Insérer tableau 4.3 de Laver et Schofield 1990 ici

Dans ces tableaux, par situation majoritaire (respectivement minoritaire), on entend une situation où un parti (respectivemement aucun parti ne) contrôle la moitié des sièges du parlement. Un gouvernement est minoritaire si le total des sièges des parlementaires affiliés à un parti du gouvernement est inférieur à la moitié. Pour certains pays comme le Danemark, c'est même presque toujours le cas. Le cadre analytique simplifié retenu dans notre article ne permet pas d'expliquer les gouvernements minoritaires. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 de Laver et Schofield (1990) pour une discussion de ces questions et à Strom (1990) pour une analyse approfondie. Strom liste cinq raisons pour lesquelles un gouvernement minoritaire peut être envisagé comme coalition gouvernementale. Au nombre de celles-ci, il mentionne la nécessité de sortir du cadre statique retenu ici et de prendre en compte un horizon temporel plus long car les partis et leurs leaders ne sont pas exclusivement motivés par des gains de court terme[23]. Rappelons que ces calculs dynamiques ne sont pas examinés dans cet article.

2.2 Alliances Gouvernementales: Taille et Composition

Traditionnellement, la littérature a abordé les questions 1, 2 et 3 de manière séparée. Les premiers travaux ont concentré exclusivement leur attention sur la question 1 à laquelle est consacrée cette section. Comme noté dans l'introduction, étant donné l'abondance de la littérature sur cette question, il ne nous est pas possible d'en faire une présentation détaillée et exhaustive. Nous avons fait le choix de retracer cette histoire en rendant tout d'abord hommage aux précurseurs, qui ont utilisé le langage et certaines intuitions de la théorie des jeux coopératifs, sans toutefois avoir recours aux analyses permises par cette approche. Nous présentons ensuite une sélection de travaux ultérieurs dans lesquels les outils de la théorie des jeux sont davantage mobilisés.

Von Neumann et Morgenstern (1944), suivis en cela par Riker (1962), formulent l'hypothèse qu'une coalition stable est une *coalition gagnante minimale* au sens de l'inclusion : *"The Size Principle"*. Leiserson (1966) raffine cette hypothèse en suggérant que les coalitions les plus probables sont celles avec le plus petit nombre de partenaires. Nous verrons ci-dessous que Riker raffine lui aussi mais d'une autre façon le principe de la taille (hypothèse de Riker-Gamson d'une coalition gagnante de poids minimal).

Les considérations idéologiques comme possible barrières à la coopération ont été introduites pour la première fois par Axelrod (1970) dans son étude des gouvernements italiens. En considérant $m = 1$, c'est à dire un axe idéologique unidimensionnel droite-gauche, il suggère que le gouvernement est une *coalition gagnante minimale connexe*. De Swann (1973) suppose quant à lui que le gouvernement est une coalition gagnante dont le rang idéologique, mesuré par la distance idéologique entre les partenaires les plus éloignés, est le plus petit possible. Chez De Swann, les valeurs précises des points idéaux sur la droite ont de l'importance alors que chez Axelrod, seul l'ordre importe. La question de la localisation des partis sur une

[23]Il écrit : "Party leaders are not concerned exclusively with immediate objectives. Their behavior must be understood in a temporal perspective. Parties have longer-term as well as short-term goals, and sometimes these will conflict... The main longer-term consideration of party leaders is a concern about future elections. There is frequently a trade-off between a party's short-term office (and policy) objectives and its longer-term electoral incentives".

échelle unidimensionnelle est une question fort débattue et controversée en science politique empirique. Nous renvoyons le lecteur à l'appendice B de Laver et Schofield pour une synthèse des principaux travaux sur le sujet pays par pays en Europe de l'Ouest et Israel. Le tableau suivant est un résumé des études dans le cas de la Belgique.

Insérer ici Figure B2 de Laver et Schofield 1990

Ces théories utilisent le langage et le formalisme de la théorie des jeux coopératifs pour développer des intuitions, mais elles n'exploitent pas réellement ses résultats et ses outils. A leur décharge, la théorie de jeux coopératifs ne contient pas de résultats sur la formation des coalitions que l'on pourrait déduire de la seule connaissance de la fonction caractéristique V. Si un jeu est strictement suradditif, l'efficacité collective recommande la formation de la plus grande coalition possible mais il faut ensuite s'assurer de sa stabilité. La modélisation de la formation des coalitions combine souvent la théorie des jeux coopératifs et la théorie des jeux non coopératifs[24]. Dans une première étape, les joueurs forment des coalitions disjointes. Puis dans une seconde étape, étant donnée cette partition, les utilités des membres des diverses coalitions sont calculées en utilisant des notions de la théorie des jeux coopératifs dans chaque jeu réduit. Par exemple dans le cas qui nous occupe, on supposera que si un gouvernment se forme la répartition des portefeuilles au sein de ce gouvernement se fera selon une clé prédermineé. Un gouvernment S sera stable s'il n'existe pas de gouvernement alternatif T tel que T soit une coalition gagnante et préférée par tous ses membres à S. L'hypothèse de Riker-Gamson est de cette nature. Dans le cas d'un jeu majoritaire pondéré, l'hypothèse de Riker-Gamson - qui énonce que le gouvernement sera une coalition gagnante de poids total minimum - peut être déduite d'une notion de stabilité de la théorie des jeux coopératifs. En effet, partant de l'hypothèse de Gamson que si la coalition gagnante S se forme, alors chaque joueur $i \in S$ recevra $\frac{w_i}{\sum_{j \in S} w_j}$(ce qui spécifie la clé de répartition des ministères pour chaque coalition), on peut montrer que le coeur du jeu NTU ainsi construit est non vide et est constitué des coalitions gagnantes S telles que $\sum_{j \in S} w_j$ est minimal. Notons cependant qu'aucun argument immédiat ne vient justifier ici l'hypothèse de départ de Gamson.

On peut bien entendu, sur un plan purement descriptif, envisager de nombreuses autres caractéristiques des coalitions gouvernementales que leur taille. Plusieurs auteurs, dont Laver et Schofield (1990) et Schofield (2008), retiennent aussi des caractéristiques générales du jeu simple considéré pour simplifier la classification de ceux-ci. Ils distinguent[25] par exemple les systèmes unipolaires (un unique grand parti et une multiplicité de petits partis), les systèmes bipolaires (deux grands partis et un parti beaucoup plus petit mais pivot) et les systèmes multipolaires (une multiplicité de partis comparables). Le tableau suivant contient quelques informations de cette nature.

Insérer tableau Tableau 5.7. de Laver Schofield 1990 ici

[24]Hart et Kurz (1983) est exemplaire de cette approche.

[25]Ils raffinent ensuite leur classification en introduisant la dimension idéologique.

Une autre caractéristique des coalitions gouvernementales qui ne sera pas explorée dans notre article est celle de leur durée. Une large littérature est consacrée à cette question. Le lecteur trouvera un premier aperçu dans le chapitre 6 *"Will it last ?"* de Laver et Schofield (1990).

Le travail de Peleg (1980, 1981) est sans doute celui qui s'appuie le plus explicitement sur la théorie des jeux coopératifs. Il propose quatre hypothèses différentes prédisant quelles coalitions gouvernementales sont susceptibles de se former. Le pouvoir prédictif de ces quatre hypothèses est ensuite testé sur des données israeliennes et européennes (et comparé à celui d'hypothèses alternatives reposant sur le principe de taille minimale).

Dans son travail d'élaboration de ces qautre hypothèses, Peleg utilise de manière importante la *"relation de désirabilité"* définie dans l'appendice 2.

Soit $S \subset N$. On dit que le joueur $i \in S$ *domine* (faiblement) S si pour tout $T \subset N \setminus S$, $\{i\} \succ S \setminus \{i\}$ ($\{i\} \succeq S \setminus \{i\}$).[26]

Un joueur $i \in N$ est *dominant* s'il existe une coalition $S \in W$ qu'il domine.

Il se peut qu'un jeu ne comporte aucun joueur dominant. Par exemple, dans le jeu majoritaire pondéré à trois joueurs $[51; 48, 32, 20]$[27], il n'y a aucune dominance stricte. Un jeu simple (même fort et propre) peut admettre plusieurs joueurs dominants. Mais un jeu majoritaire pondéré a au plus un joueur dominant. Peleg appelle *dominé* un jeu simple non dictatorial et admettant un joueur dominant. Illustrons cette notion par quelques exemples.

En Finlande, le parlement issu des élections de 1966 est décrit par le jeu majoritaire pondéré $[100; 41, 55, 7, 49, 9, 12, 26]$. Les 7 partis sont identifiés[28] de gauche à droite par les lettres a, b, c, d, e, f, g. Ici le parti b est un parti dominant. En effet la coalition $\{b, d\}$ est gagnante et de plus $\{b\} \succ \{d\}$ puisque b peut gagner avec $\{a, c\}$ alors que d ne le peut pas.

En Irlande, le parlement issu des élections de 1987 est décrit par le jeu majoritaire pondéré $[84; 81, 51, 14, 12, 4, 4]$. Les 6 partis sont aussi identifiés par les lettres a (Fianna Fail),b (Fine gael), c, d, e, f. Clairement le parti a est un joueur dominant. Pour le voir considérons la coalition gagnante $\{a, b, c, e\}$. $\{a\} \succ \{b, c, e\}$ puique $\{a, d\}$ est gagnante alors que $\{b, c, d, e\}$ ne l'est pas.

Pour terminer, considérons le parlement d'Allemagne de l'Ouest issu des élections de 1987. Il est décrit par le jeu majoritaire pondéré $[249; 174, 49, 186, 46, 42]$. Les 5 partis sont respectivement : le CDU (a), le CSU (b), le SPD (c), le parti démocrate libre (d) et les verts (e). Les partis a et b ont en fait signé une alliance et ne forment de facto qu'un seul joueur. Aucun des deux n'est dominant à lui tout seul mais l'alliance a+b l'est. En effet, on vérifie que la coalition $\{a + b, c\}$ est gagnante. De plus, $\{a + b\} \succ \{c\}$ puisque $a + b$ peut gagner avec d alors que c ne le peut pas.

Sur la base des données électorales de De Swaan portant sur 9 pays, Peleg obtient un tableau décrivant le nombre de parlements non dictatoriaux, c'est à dire où aucun parti n'a à lui tout seul la majorité ("essential assemblies") et parmi eux le nombre de parlements

[26] Remarquons que dans un jeu majoritaire pondéré, si un joueur possède une majorité stricte dans une coalition, alors il domine faiblement cette coalition.

[27] Le premier nombre à l'intérieur des crochets désigne le nombre de voix garantissant une majorité, et les trois nombres suivants désignent les poids des joueurs.

[28] Nous renvoyons le lecteur à Van Deemen (1989) pour une description plus complète de ces exemples.

dominés ("dominated assemblies"):

Insérer tableau 2.1. de Peleg (1981) ici

On constate que la part des parlements dominés dans les parlements où aucun parti n'a à lui tout seul la majorité est très importante. Lorsque qu'un jeu est dominé, il appelle *coalition ordinaire* ("ordinary coalition") une coalition gagnante qui contient le joueur dominant et *exceptionnelle* ("exceptional coalition") une coalition gagnante qui ne le contient pas. Le tableau ci-dessous[29], emprunté à Peleg, montre que les coalitions ordinaires représentent le cas générique dans les gouvernements de la base de données de De Swaan.

Insérer tableau 3.1. de Peleg (1981) ici

Cette notion essentielle de dominance introduite, on peut à présent présenter les quatre hypothèses de Peleg.

Dans le cas d'un jeu simple $\mathcal{W}$ dominé, on notera $H(\mathcal{W})$ l'ensemble des coalitions gagnantes contenant le joueur dominant et dominées faiblement par lui. La première hypothèse formulée par Peleg énonce que si un parlement est dominé et si le joueur dominant reçoit mandat pour former le gouvernement, alors le gouvernement sera une coalition dans $H(\mathcal{W})$ (notons au passage que les coalitions de $H(\mathcal{W})$ sont ordinaires).

Il introduit ensuite le concept de *"coalition determinante"*. Une coalition $S \in W$ est déterminante si: $i \in S$ et $S \backslash \{i\} \succ \{i\} \Longrightarrow S \backslash \{i\} \in W$. Que demande cette propriété ? Elle demande que si un joueur i de la coalition gagnante S ne domine pas le reste de la coalition, alors le reste de la coalition, c'est à dire $S \backslash \{i\}$, reste gagnante. Elle implique en particulier que si le groupe T constitue une majorité au sein de S c'est à dire si $T \succ S \backslash T$ alors aucun membre de $T \backslash S$ n'est pivot. On notera $D(\mathcal{W})$ l'ensemble des coalitions déterminantes du jeu $\mathcal{W}$. Il existe des jeux simples dominés propres et forts $\mathcal{W}$ tels qu'aucune coalition de $H(\mathcal{W})$ ne soit déterminante.[30] Peleg montre cependant que si le jeu dominé est propre fort et homogène alors $D(\mathcal{W}) \cap H(\mathcal{W}) \neq \varnothing$. La seconde hypothèse qu'il formule énonce que si un parlement est dominé et si le joueur dominant reçoit mandat pour former le gouvernement, alors le gouvernement sera une coalition dans $D(\mathcal{W}) \cap H(\mathcal{W})$.Naturellement, cette hypothèse n'a de sens que si cette intersection est non vide.

Les deux dernières hypothèse considérées par Peleg font intervenir explicitement le mode de partage des portefeuilles entre les partis choisis par le parti dominant pour former le

[29]Le lecteur pourra ête surpris de la non coïncidence des chiffres cumulés dans les tableaux 2.1. et 3.1. La raison en est la suivante. Dans le tableau 2.1., les unités sont les élections législatives (parlements) alors que dans le tableau 3.1., les unités sont les gouvernements. Si plusieurs gouvernements ont vu le jour entre deux élections, ils sont comptés comme autant de coalitions différentes. En revanche, les gouvernements minoritaires ne sont pas comptés puisque par définition, ils ne sont ni ordinaires, ni exceptionels car non gagnants.

[30]Considérons par exemple le jeu majoritaire pondéré $[9; 5, 3, 3, 3, 1, 1, 1]$. On note que $\{1, 2, 5\} \in \mathcal{W}$ et 1 domine $\{1, 2, 5\}$. En effet, $\{1, 3, 6\} \in W$ alors que $\{2, 3, 5, 6\} \notin W$. Par conséquent, le joueur 1 est dominant et ce jeu est dominé. Si $S \in D(\mathcal{W})$ et $1 \in S$ alors on vérifie facilement que $|S \cap \{2, 3, 4\}| \geq 2$. Donc $S \notin H(\mathcal{W})$.

gouvernement. La troisième hypothèse énonce que la coalition S est choisie de façon à maximiser l'allocation qu'il reçoit sachant que celle-ci est sa valeur de Shapley dans le jeu réduit à la coalition S qu'il a choisie (où par jeu réduit il faut entendre ici le jeu simple V_S réduit à cette coalition S et défini comme suit: pour tout $T \subseteq S : V_S(T) = 1$ if $T \in W$ et $V_S(T) = 0$ sinon). Comme le démontre Peleg, cette hypothèse peut être incompatible avec les deux précédentes.

La quatrième hypothèse est dans le même esprit que la troisième . Elle énonce que la coalition S est choisie de façon à maximiser l'allocation qu'il reçoit sachant que cette fois le nucléole est utilisé dans le jeu réduit à la coalition S qu'il a choisie (où par jeu réduit, il faut entendre, cette fois-ci, le jeu simple V_S réduit à cette coalition S et défini comme suit: pour tout $T \subseteq S : V_S(T) = 1$ si il existe $R \subseteq N \backslash S$ tel que $T \cup R \in W$, et $V_S(T) = 0$ sinon. On observe que cette version de la notion de jeu réduit fait intervenir cette fois l'opposition).[31]

Quel est le pouvoir prédictif de ces quatre hypothèses de Peleg? Et comment ce pouvoir prédictif se compare-t-il aux hypothèses d'Axelrod ou de Gamson-Riker. Peleg fournit une première réponse dans le tableau suivant.

Insérer tableau 8.2. de Peleg (1981) ici

Dans ce tableau, les colonnes correspondent (à ceci près[32] que la colonne D ne correspond pas à la seconde hypothèse $D(\mathcal{W}) \cap H(\mathcal{W})$ mais simplement à $D(\mathcal{W})$) qui aux quatre hypothèses de Peleg et CLMR correspond aux coalitions gagnantes minimals et connectées pour un ordre gauche-droite des partis propre à chaque contexte . L'hypothèse 1 est compatible avec de nombreuses observations (84% des gouvernements étudiés la satisfont), ainsi que l'hypothèse 4 (67% des gouvernements étudiés). En revanche, les hypothèses 2 et 3 rendent

[31] Peleg étudie la compatibilité de cette dernière hypothèse avec les précédentes.

Il montre également que la première hypothèse peut être incompatible avec l'hypothèse de connectivité d'Axelrod. L'examen systématique de la compatibilité entre l'hypothèse d'Axelrod et les hypothèses de Peleg dans le cas des jeux dominés est le sujet de l'article d'Einy (1985). Dans le cas des jeux majoritaires pondérés, Einy démontre que si le poids du joueur dominant est une fraction suffisante du quota de victoire alors chacune des hypothèses de Peleg, à l'exception de la troisième, est compatible avec l'hypothèse d'Axelrod. Van Deemen (1989) explore quant à lui la compatibilité de la première hypothèse de Peleg et de l'hypothèse de Gamson-Riker. Il démontre que si un jeu majoritaire pondéré est propre et dominé alors il existe une coalition de poids minimal contenant le joueur dominant et toute coalition de poids minimum contenant le joueur dominant est dominée par celui-ci. La troisième hypothèse de Peleg est explorée par Chua et Felsenthal (2008a,b) sous le nom d'hypothèse d'Aumann.

Aumann écrit à propos de ses efforts pour prédire la formation de coalitions gouvernementales : "Besides the above examples, another example is the formation of governments. For years I have been predicting the government that will form in Israel once the composition of the Israeli parliament is known after an election. That is a structured situation, with set rules. The parliament has 120 seats. Each party gets a number of seats in proportion to the votes it got in the election. To form a government, a coalition of 61 members of parliament is required. The president starts by choosing someone to initiate the coalition formation process. Usually, but not necessarily, this "leader" is the representative of the largest party in parliament. The important point is that the process of government formation is a structured situation, to which you can apply a theory" (van Damme (1998)).

[32] Comme le note cependant Peleg, elles sont souvent (mais pas toujours) compatibles dans la base de données considérées.

très mal compte des observations. Par comparaison, les hypothèses reposant sur le concept de "size principle", sous ses différentes variantes, sont compatibles avec grosso modo 50 à 60% des observations. Notons néanmoins que ces chiffres bruts livrés par Peleg doivent être interprétés avec prudence. En effet, certaines hypothèses font des prédictions plus précises que d'autres (par exemple, si un gouvernement satisfait l'hypothèse 2 de Peleg, il satisfait aussi par définition l'hypothèse 1), ce qui fait qu'un fort taux de compatibilté d'une hypothèse avec les observations peut aussi être le signe d'une précision dans la prédiction plus faible/plus grande "permissivité" (à l'extrême, une hypothèse qui prédirait que "tout peut ariver" serait compatible avec 100% des observations). Ces questions seront discutées dans la section 4.2.

2.3 Le Partage des Portefeuilles Ministériels

Cette section est consacrée exclusivement à la seconde question. A l'exception de Laver et Schofield (dont nous présenterons les travaux plus loin), la répartition des portefeuilles ministériels a été abordée indépendamment de la formation de la coalition gouvernementale; cette dernière est considérée comme une donnée. Cette littérature est largement dominée par une hypothèse que nous avons déjà rencontrée (lorsque nous avons présenté l'hypothèse de Gamson-Riker) et qui est aujourd'hui répertoriée comme *Loi de Gamson.* Cette loi empirique énonce que les gouvernements répartissent les portefeuilles entre les partis du gouverment au proprata du nombre de sièges que contrôlent ces partis dans l'assemblée. Un très volumineux travail empirique semble confirmer la validité de cette loi. En régressant la part de portefeuilles ministériels y_i obtenue par un parti i au gouvernement sur la part g_i prédite par l'hypothèse de Gamson, sur la base de données couvrant 114 coalitions dans 13 démocraties sur la période 1945 à 1969, Browne and Franklin (1973) ont obtenu :

$$g = -0.01 + 1.07y$$

Cette régularité empirique a été confimée par de nombreuse études et a donc acquis de ce fait le statut de "loi". Browne et Franklin montrent cependant que les deux coefficients de la régression dépendent du nombre de partis dans la coalition gouvernementale. Par exemple, dans le cas de coalitions à deux partis, la régression devient :

$$g = -0.05 + 1.12y$$

On note que dans ce cas, tout parti avec moins de 40% des sièges recoit un pourcentage supérieur à celui prédit par Gamson, phenomène désigné sous le nom de "relative weakness effect" par Browne et Franklin. La table suivante illustre cette dépendance :

Insérer la table 2 de Laver et Schofield BJPS ici

Ce tableau suggère aussi que dans le cas de gouvernements avec beaucoup de partenaires, les petits partis ont tendance cette fois à recevoir moins de portefeuilles que le nombre prédit par Gamson. Dans un papier fondamental, Schofield et Laver (1985) ont abordé cette question en introduisant pour la première fois des solutions de la théorie des jeux coopératifs, c'est à dire des solutions basées explictement sur la construction du jeu coopératif TU V défini ci-dessus. Afin d'examiner les implications théoriques du marchandage, ils considèrent le jeu réduit au gouvernement S et calculent le *noyau* de ce jeu. Le tableau ci-dessous illustre leurs calculs dans le cas des élections en Finlande en 1970.

Insérer la table 3 de Laver et Schofield BJPS ici

Schofield (1976) montre cependant que Gamson tend à faire mieux que le noyau, tout en notant cependant une utilité pour la solution coopérative dans la mesure où le noyau prédit correctement la direction observée des écarts avec Gamson.

Laver et Schofield suggèrent de considérer une théorie basée sur l'*ensemble de marchandage* avec quelques qualifications, au premier rang desquelles la prise en compte d'objections et contre-objections émanant de coalitions de joueurs.[33] Illustrons la logique de marchandage dans un exemple réel.

En novembre 1958, en Belgique, un gouvernement formé de deux partis - le parti social chrétien (PSC) et le libéral (PLP) - est formé. Comme le montrent les résultats reportés dans le tableau ci-dessous, bien que le PSC détient 83% des sièges, il ne recoit que 13 portefeuilles sur les 19, c'est à dire 68% du total. Puisque Gamson lui en prédit 16, nous sommes encore en présence d'une version assez forte du "relative weakness effect".

Insérer la table 4 de Laver et Schofield BJPS ici

Que prédit le noyau ? Sachant qu'il y a 87 sièges contrôlés par l'opposition et que 107 sont nécessaires pour former une coalition gagnante, à la fois le PSC et le PLP sont pivots. Si le PSC reçoit moins de portefeuilles que le PLP alors le surplus du PSC sera plus petit et alors selon la logique du noyau, le PLP avec un surplus plus grand quittera la coalition. Le noyau conduit donc ici à un partage égalitaire des portefeuilles entre les deux partis c'est à dire 9.5 portefeuilles chacun. Cette conclusion est assez contre-intuitive car la position du PSC dans ce marchandage semble plus forte que celle du PLP.

Montrons à présent que le partage observé appartient à l'ensemble de marchandage (cf. la définition dans l'appendice 1).

Supposons que le PLP cherche à former une coalition gagnante excluant le PSC. Puiqu'il y a 212 sièges au total et que le PLP en contrôle 21, il a besoin de 86 sièges supplémentaires. Le PSC quant à lui en controle 104 et n'a donc besoin que de 3 sièges supplémentaires.

Imaginons qu'au départ le PLP n'ait que 5 portefeuilles dans le gouvernement. Supposons qu'il objecte en réclamant un poste supplémentaire c'est à dire 6 portefeuilles. Il en conserve donc 13 pour ses partenaires. Supposons qu'il forme une coalition avec le BSP et le PCB en leur promettant respectivement 7 et 6 portefeuilles ministériels. Le PSC n'a pas de

[33]Il est important aussi de signaler que même si le jeu de marchandage est le jeu réduit aux partis du gouvernement, les partis extérieurs sont pris en compte dans la séquence des objections et contre-objections. On pourrait envisager à l'inverse un calcul de bargaining set basé exclusivement sur le jeu réduit ce qui dans une contre-objection impliquerait seulement les partis du gouvernement. Signalons enfin que l'ensemble de marchandage ainsi défini peut être vide ou contenir plusieurs vecteurs. Nous renvoyons le lecteur à Schofield (1978) pour un exposé rigoureux de ces points techniques.

contre-objection. En effet, il avait au départ 14 portefeuilles et il ne lui reste donc que 5 portefeuilles pour convaincre les partenaires, ce qui est insuffisant. Si en revanche le PLP avait 6 portefeuilles dans l'accord de gouvernement, cette logique ne peut être mise en oeuvre. En effet si dans l'objection, le PLP se contente de 7 portefeuilles et répartit les 12 restants équitablement entre le BSP et le PCB, le PSC peut formuler une contre-objection : conserver 13 postes pour lui même et offrir les 6 restants au BSP.

Symétriquement avec 13 portefeuilles, le PSC n'a pas d'objection justifiée non plus contre le PLP. Si le PSC en souhaite 14 et donne pour ce faire 5 portefeuilles au BSP, le PLP peut formuler une contre-objection en offrant 6 postes au BSP et un poste au PCB.

En résumé ici lo logique de marchandage prédit 6 portefeuilles pour le PLP et 13 pour le PSC, des chiffres distants de ce que laissaient prévoir leurs poids en sièges, mais où les écarts avec Gamson sont néanmoins moindres que ce que prédit le noyau. Dans le cas Belge, l'ensemble de marchandage a offert une explication du "relative weakness effect". Dans l'appendice 4, nous présentons d'autres exemples concrets de cette logique de marchange, empruntés à l'histoire politique du Danemark et de la Finlande.

Laver et Schofield (1985,1990) ont conduit une analyse empirique destinée à mesurer les performances relatives des trois théories discutées ci-dessus: Gamson, noyau et ensemble de marchandage. Une régression multiple portant sur la part observée d'un parti dans un gouvernement avec comme régresseurs les valeurs de parts attachées aux trois théories conduit à une très forte domination de Gamson comme l'illustre le tableau ci-dessous.

Insérer le tableau 7 de Laver et Schofield (1985) ici

Comme ils le font remarquer, chaque théorie prise séparément prédit mal les répartitions, contrairement à leur combinaison. Conduire des régressions simples séparées ne permet pas de conclure, sinon à une certaine infériorité du noyau par rapport aux deux autres et il faut donc conduire une analyse plus fine car la comparaison entre Gamson et l'ensemble de marchandage est ambigue. Nous renvoyons le lecteur à leur analyse plus poussée de leurs données sur la base du rang des partis dans les coalitions gouvernementales et des pays concernés.

2.4 Le Compromis Programmatique

Examinons maintenant les implications de l'hypothèse polaire où les partis sont purement idéologiques et les réponses qui peuvent être apportées à la troisième question.

Une première hypothèse envisageable énonce que la politique x mise en place par le gouvernement n'est pas contestée, à l'unanimité de ses membres, par une coalition majoritaire S, c'est à dire qu'il est impossible à la coalition S de proposer une politique alternative y telle que $U_i(y) > U_i(x)$ pour tout $i \in S$. Dans le jargon de la théorie des jeux coopératifs, ceci équivaut à demander à ce que la politique x soit dans le *coeur* du jeu V.

Dans le cas où $m = 1$, c'est à dire lorsque les partis politiques sont rangés sur un axe gauche-droite, la connaissance de leurs points idéaux suffit à déterminer le classement des partis sur cet axe et la valeur réelle de ces points est sans importance pour le calcul du coeur. Le coeur consiste ici en la politique du parti median, où par médian on entend le parti occupant la position $\frac{n+1}{2}$ sur l'axe gauche-droite. Notons que ce résultat est valide pour tout jeu simple propre : dans ce cas le médian est le plus parti i tel que: $\{1, 2, ..., i-1\} \notin W$ et $\{1, 2, ..., i\} \in W$ (les partis étant numérotés selon leur position sur l'axe gauche-droite). Dans le cas du jeu majoritaire pondéré ordinaire, il s'agit du plus petit parti tel que $\sum_{j=1}^{i-1} w_j < \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j}{2}$ et $\sum_{j=1}^{i} w_j > \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j}{2}$. Il est important de noter que le parti médian n'a nul besoin de contrôler la majorité. Cette théorie prédit que la politique mise en place par le gouvernement sera la politique préférée par le parti médian. Le gouvernement peut être formé de ce parti seulement ou d'une coalition de partis comprenant ou non le parti médian. Pour être plus précis et avoir aussi une prédiction quant au gouvernment formé, il faudrait une théorie du marchandage au sein du gouvernement.

Lorsque $m \geq 2$, le coeur d'un jeu n'a aucune raison d'être non vide. Pour ce faire il faut que son nombre de Nakamura soit au moins égal à 4 (voir appendice 2). Ce n'est pas le cas du jeu majoritaire ordinaire. La géométrie du coeur est particulièrement instructive dans le cas spatial[34]. A tout point $x \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$, on peut associer un *ensemble dominant* ("winset") $W(x)$ défini comme suit:

$$W(x) = \cup_{S \in \mathcal{W}} \{y \in X : v_i(y) > v_i(x) \text{ pour tout } i \in S\}$$

Dans le cas où $m = 2$ et $n = 3$, la forme en pétale de l'ensemble dominant est illustrée sur la figure ci-dessous dans le cas du jeu majoritaire ordinaire :

Insérer pétale ici

Une politique x est dans le coeur du jeu lorsque $W(x) = \varnothing$. Une autre facon de l'appréhender est en termes d'*hyperplan médian.* Un hyperplan H de $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ est un hyperplan median si pour chacun des deux côtés H^+ et H^- de l'hyperplan[35], se trouvent la moitié des points idéaux des partis. Par exemple dans le cas de $n = 3$ et $m = 2$ et du jeu majoritaire symétrique ordinaire, on représente sur la figure ci-dessous, une ligne médiane.

Insérer ligne médiane ici

Il est facile de voir qu'un point x est dans le coeur ssi il appartient à tous les hyperplans medians. Par ailleurs, étant donné deux points x et y dans $\mathbb{R}^{\gtrdot}$, on peut considérer l'ensemble des hyperplans orthogonaux à la droite passant par x et y. L'un d'entre eux est un hyperplan médian[36]. On en déduit que si $\frac{x+y}{2} \in H^-$ (H^+), alors $y \in W(x)$ $(x \in W(y))$. Dans le cas du jeu majoritaire ordinaire, il est quasiment impossible d'obtenir un coeur non vide. En effet, comme le suggère cette géométrie, pour avoir un coeur non vide, les points idéaux doivent être dans un configuration très particulière. Le lecteur trouvera tous les développements sur

[34] Le lecteur trouvera une présentation élémentaire de ces notions dans Feld, Grofman et Miller (1989) et Mueller (2003).

[35] Par côté, on entend le demi-espace ouvert défini par l'hyperplan et l'hyperplan lui même.

[36] On dit que c'est l'hyperplan médian dans la direction $\overrightarrow{xy}$.

ce sujet dans la dernière partie de l'appendice 2. Notons cependant que sous cette forme très négative, ce résultat ne s'applique qu'au jeu majoritaire ordinaire. Pour un jeu majoritaire pondéré, le coeur peut être non vide comme l'illustre la cas de la Knesset en 1992 illustré ci-dessous dans le cas où $m = 2$.

Insérer figure 6.1 de Schofield (2008) ici

Lorsque le coeur est vide, quelle théorie alternative peut-on proposer ? Plusieurs solutions sont décrites dans l'appendice 2. Au nombre de celles-ci figurent l'*ensemble découvert* et le *yolk*. On trouvera dans Miller (2007) une analyse gémétrique détaillée de ces deux solutions. Le yolk est typiquement un disque assez petit comparé à l'ensemble de Pareto qui est ici l'enveloppe convexe des points idéaux. Certaines lignes médianes comptent plus particulirement dans le sens où elles délimitent le yolk. Parmi les autres solutions privilègiées pour étudier les coalitions les plus susceptibles de se se former et les politiques qu'elles mettraient en place, figure aussi la solution mise en avant par Schofield sous le nom de *Heart*. Sa définition et ses pincipales propriétés sont rappelées dans l'appendice 2. En fait sa géométrie est facile à déterminer. Il s'agit d'un ensemble étoilé (pas nécessairement convexe) délimité par une partie des hyperplans medians[37]. On trouvera dans les travaux de Schofield de nombreuses études de cas basées sur les données électorales de nombreuse démocraties parlementaires ainsi que des commentaires quant aux coalitions attachées aux lignes médianes bornant le heart. Par exemple, la figure ci-dessous reproduit le Heart dans le cas de la Knesset en 1988.

Insérer figure 6.2 de Schofield (2008) ici

A cette approche "institution-free", on peut préferer l'approche "néo-institutionnelle" de Laver et Shepsle (1996) qui développent dans le cadre du modèle spatial un cadre contraignant le lien entre la formation d'une coalition gouvernementale et le choix d'un compromis programmatique. Un gouvernement est décrit par une coalition gagnante S et une application M_S de S dans $\{1, 2, ..., m\}$ qui assigne à chaque parti le ou les ministère(s) dont il a la charge. Il est supposé que chaque ministère exerce un contrôle dictatorial sur la politique dont il a la charge. Les partis sont désormais décrits par leur fonction d'utilité (indirecte) V_i sur les applications M_S :

$$V_i(M_S) = C - \sum_{k=1}^{m} (\theta_i - \theta_{M_S(k)})^2$$

On crée une structure de treillis en considérant l'ensemble les points idéaux $(\theta_i)_{i \in N}$. Par exemple, si $m = 2$ et $n = 4$, on obtient génériquement 16 vecteurs du plan susceptibles d'être considérés. Laver et Shepsle définissent une coalition M_S comme[38] étant un *équilibre de gouvernement* s'il n'existe pas M_T avec $T \in \mathcal{W}$ tel que :

$$V_i(M_T) > V_i(M_S) \text{ pour tout } i \in T$$

[37]On trouvera dans la section 13.7.2. de Mueller (2003) une présenation simple du Heart.

[38]La donnée de M_S définit implicitement la coalition de gouvernement S.

en d'autres termes, si M_S appartient au coeur du jeu coopératif NTU dont la fonction caractéristique V est définie par :

$$V(S) = \left\{ \begin{array}{c} \left\{v \in \mathbb{R}^S \mid \exists M_S : S \to \{1, ..., m\} \text{ tel que pour tout } i \in S,\ v_i \leq V_i\left(M_S\right)\right\} \text{ si } S \in \mathcal{W} \\ \mathbb{R}^{\mathbb{S}}_{-} \text{ si } \mathbb{S} \notin \mathcal{W} \end{array} \right.$$

Ils définissent un parti i comme étant *"très fort"* si l'ensemble dominant de son point idéal ne contient aucun point du treillis, c'est à dire s'il n'existe pas de coalition gagnante S et gouvernement M_S tels que :

$$V_j\left(M_S\right) > V_j\left(M_{\{i\}}\right) \text{ pour tout } j \in S$$

En d'autres termes, $M_{\{i\}}$ est un équilibre de gouvernement. Ils définissent ensuite un parti i comme étant *"raisonnablement fort"* s'il n'est pas très fort mais que les points du treillis de l'ensemble dominant de son point idéal ont toujours au moins une coordonnée correspondant à la coordonnée idéale du parti i. En d'autres termes, tous les équilibres de gouvernement contiennent le parti i. La différence entre un parti fort et un parti raisonnablement fort fait écho à la différence entre un dictateur et un joueur ayant un pouvoir de véto dans la théorie des jeux simples exposée dans l'appendice 2.

Il n'est pas aisé de déterminer de facon générale quelles sont les caractéristiques qui font d'un parti un parti très fort ou raisonnablement fort. Comme l'écrivent Martin et Stevenson (2001) : "Mathematically, these are not just median parties, multidimensional median parties, core parties or some other distinguished type of party. Rather, the conditions that define a strong party are much more complex not always corresponding to a party's centrality or size".

L'existence d'un équilibre de gouvernement n'est pas garantie[39] mais les chances d'en avoir un sont beaucoup plus élevées que dans le cas classique où tous les compromis sont envisageables. Au nombre des candidats, figure le vecteur, appelé *le médian vectoriel*,[40] où chaque coordonnée est le médian des points idéaux dans cette dimension. En notant T, l'ensemble des partis tels que le point idéal du parti est le médian dans au moins une dimension, on obtient ainsi une fonction M_T. Mueller (2003) propose un exemple éclairant de ces notions dans le cas du Bundestag allemand en 1987 (cf. sa figure 13.5 page 288).

Le lecteur trouvera dans Laver et Shepsle (1996) une analyse très poussée des implications de cette nouvelle approche, qui a comme principal mérite d'offrir un cadre d'analyse conduisant à la *détermination jointe* de l'alliance gouvernementale et de son compromis programmatique, et par voie de conséquence la répartition des portefeuilles ministériels.

3 Alliances/Coalitions Electorales

La section précédente a été consacrée aux alliances entre candidats et partis après les élections. Cette section est dédiée à l'analyse des alliances entre les candidats et partis

[39] Les exemples classiques d'échanges de votes avec $m = 2$ et $n = 3$ illustrent cette question d'existence.

[40] Médian vectoriel est notre traduction pour *dimension-by-dimension median (DDM)* chez Laver et Shepsle.

avant et *pendant* les élections. Nous appelerons *alliances pré-électorales*, les alliances/accords conclus avant le début des élections, *alliances intérim-électorales* les alliances conclues pendant les élections, et *alliances post-électorales,* les alliances conclues après les élections. Par définition, les alliances intérim-électorales n'ont de sens que le contexte où l'élection comprend plusieurs tours.[41]

Dans cette section, nous allons donc nous focaliser sur les alliances pré-électorales et intérim-électorales, que Duverger appelle *alliances électorales*, par opposition aux post-électorales que sont les *alliances gouvernementales.* Le système électoral a un impact considérable sur la formation d'alliances stratégiques entre partis.[42] En effet, les incitations à s'allier et la nature des dispositifs et tactiques d'alliance ne sont pas les mêmes dans un système pluralitaire à un tour où les candidats se concurrencent dans des districts où il y a un siège à pourvoir et dans un système proportionnel avec listes bloquées où il y a grand nombre de sièges à pourvoir. Dans le premier cas, la raison d'être de l'alliance est d'éviter de perdre des sièges en raison des problème de coordination entre électeurs et donc d'émiettement des voix résultant d'une multiplicité de candidatures du même camp[43]. Dans le second cas, les incitations à former une alliance sont beaucoup plus faibles voire nulles si les utilités des acteurs sont modélisées comme étant fonction exclusivement des gains en sièges à court terme. Elles refont cependant surface si le système n'est pas parfaitement proportionnel, par exemple si il existe de seuils planchers en deçà desquels les listes ne participent pas à la répartition des sièges ou si le nombre de sièges par district est petit.

Dans les systèmes pluralitaires à un ou deux tours, il pourra s'agir d'accords sur les candidatures. Dans le cas d'un système à un tour, certains partis peuvent s'entendre au préalable pour ne pas présenter de candidats dans certains districts : le parti A ne présente pas de candidat dans le district 1 pour laisser le champ libre au candidat du parti B et le parti B renvoie l'ascenseur en ne présentant pas de candidat dans le district 2 pour laisser le champ libre au candidat du parti A. Il s'agit ici d'une entente pré-electorale de type désistement. Suivant les forces respectives des deux partis, on peut penser que le taux de substitution ne sera pas de 1 pour 1 mais par exemple de 1 pour 4 ou 5. De plus, l'accord

[41]Remarquons ici qu'il existe une différence essentielle entre les alliances post-électorales et les alliances pré ou intérim-électorales. Ex post, les jeux sont faits et chaque protagoniste connaît avec certitude les ressources en sièges dont il dispose. Ex ante ou au stade intérim, rien n'est fait et les acteurs sont exposés à une incertitude. Cette incertitude est d'autant plus compliquée que pour chaque contrefactuelle d'alliance, les joueurs doivent être capables d'anticiper la réaction des électeurs. Comment les électeurs vont-ils se comporter face à telle ou telle configuration d'alliances ? Même si les électeurs ont des préferences bien définies sur les candidats/partis, il n'est pas immédiat de savoir comment ils évaluent les alliances et si eux mêmes ont des anticipations concernant le jeu post-électoral ? La théorie sur ce sujet est loin d'être développée, à l'exception d'Austen-Smith et Banks (1988, 1990).

[42]Comme l'écrit Duverger : "Les alliances électorales sont elles-mêmes très variées, suivant le mode de scrutin et suivant le degré d'union : présentation de candidats communs ou de listes communes au premier tour ou au tour unique, désistements mutuels au second tour, accords pour la répartition des restes ou apparentements dans certains systèmes proportionnels, etc...". Duverger se livre à une analyse très fine des modes d'alliances électorales. En particulier il met en avant, comme nous le faisons dans cette section, le rôle de l'électeur. On pourrait écrit-il distinguer les *"alliances forcées des alliances facultatives"*. Golder (2006) distingue cinq tactiques d'alliance.

[43]Golder (2006) l'évoque sous l'appelation "disproportionality argument" et énonce ensuite une hypothèse de disproportionnalité.

peut etre multilatéral, c'est à dire impliquer plus de deux partis. Dans le cas d'un système à deux tours, l'argument de coordination ne disparaît pas (les électeurs français en savent quelque chose) mais perd de son intensité. Un accord de désistement peut désormais être conditionnel, c'est-à-dire fonction des scores réalisés par les candidats des partis de l'alliance dans chaque district. Il peut être signé ex ante, c'est-à-dire avant le premier tour, ou au stade intérim, c'est-à-dire après le premier tour. Les discussions entourant une tactique d'alliance portent principalement sur l'étendue et la géographie des désistements mais peuvent inclure également des questions programmatiques et, le cas échéant, la distribution des portefeuilles de l'exécutif en cas de victoire. A titre d'illustration, la prochaine section sera consacrée à l'étaude des accords bilatéraux de désistement dans un scrutin majoritaire à un tour.

Dans le cas de scrutin de type proportionnel où des listes sont en concurrence pour l'obtention de sièges dans une assemblée, les tactiques d'alliance peuvent encore conserver leur attrait dans certains cas de figure. Pour que ce soit le cas, il faut qu'il y ait une composante non proportionnelle dans la formule de conversion des voix en sièges et/ou un calcul qui dépasse la considération des gains de sièges à court terme. Parmi ces composantes non-prorpotionnelles, figurent notamment les seuils de représentation (par exmple, une liste doit disposer d'au moins 5% des voix exprimées pour siéger au Parlement) et la présence de bonus en sièges pour la liste arrivée en tête. A la différence des candidatures individuelles, les listes permettent d'accommoder des arrangements variés entre les partis en choisissant le nombre de partenaires de chaque parti de l'alliance qui figureront sur la liste et leurs positions respectives sur cette liste d'union. Donc en principe, il n'est nul besoin de procéder à un désistement sec. En fait, une stratégie de désistement peut très bien être proposée par un parti hors de l'alliance. En se désistant, certes, ce parti renonce à briguer des sièges mais il peut éviter l'accession au pouvoir exécutif d'un parti qu'il classe en dessous de ses adversaires habituels. Pour que ce risque soit présent, notons qu'il faut une entorse à la proportionnelle, comme par exemple un bonus significatif à la liste arrivée en tête.[44] L'essentiel des travaux consacrés aux alliances électorales dont nous allons parler appartiennent à cette catégorie : des systèmes de type proportionnel, mais présentant des composantes non proportionnelles comme des seuils ou des bonus. Pour expliquer l'éclairage de la théorie des jeux coopératifs[45]

[44] Considérons à titre d'exemple un système électoral proportionnel à hauteur de 75% des sièges entre les partis ayant atteint le seuil de 10% au premier tour et avec un bonus de 25% au vainqueur. (Il s'agit du mode de scrutin utilisé en France pour les élections régionales. Nous présenterons en détail ce mode de scrutin dans la dernière partie de cette section.) Si par exemple la liste en tête fait 33% des voix, que le second fasse 30% ,que le parti dont nous examinons le comportement ne fasse que 20% et que les autres partis soient en dessous de 10%, en se maintenant il court le risque (si les électeurs des partis éliminés s'abstiennent et que les abstentionnistes du premier tout ne se mobilisent pas) de faire élire le premier parti. Le score de deuxième tour du premier parti devient égal à $\frac{33}{33+30+20} \simeq 40\%$ et son pourcentage de sièges est égal à $0.25 + 0.4 \times 0.75 = 0.55$. Il est donc majoritaire et contrôle à lui tout seul l'exécutif (dans le terminologie de la section 2, le jeu simple post-électoral est dictatorial). En se désistant et en donnant comme consigne de vote à ses électeurs de voter pour le second, il fait monter le score du second à $\frac{30+20}{33+30+20} \simeq 60\%$ qui obtient dès lors $0.25 + 0.6 \times 0.75 = 70\%$ des sièges et est en position de gèrer seul l'exécutif. Il faut noter qu'à proprement parler un tel désistement ne fait pas partie d'une stratégie d'alliance car ici le joueur qui s'est désisté n'est pas un partenaire.

[45] S'agissant de la modélisation, rien n'interdirait a priori de modéliser le contexte stratégique d'alliance comme un jeu non-coopératif, notamment dans le cas où la décision est binaire : participer ou non à un projet

en matière d'alliances électorales, nous avons choisi de nous concentrer sur deux modes de scrutin très singuliers remplissant ces conditions : le premier a été utilisé en France pour élire les députés dans les deux dernières élections de la $4^{ième}$ République et le second est utilisé en France depuis 2004 pour élire les conseillers régionaux[46]. Pour ce faire, nous allons commencer par introduire quelques notations et définitions générales s'appliquant aux deux contextes. Puis nous définirons et analyserons séquentiellement les deux modes de scrutin que nous venons d'évoquer.[47]

Dans toute cette section, s'agissant des partis, nous allons estimer en première approximation de court terme que leur utilité est fonction exclusive de leur résultat électoral en sièges et de l'identité de l'alliance qui formera l'exécutif. Pour répondre à cette dernière question (qui formera l'éxécutif ?), il faut donc avoir au préalable répondu aux questions qui étaient l'objet de la section 2. Ayant une théorie transformant un profil de sièges en une coalition gouvernementale et un programme, on peut donc conclure que l'utilité en forme réduite ne dépend que du résultat électoral global. Mais, il n'est plus clair désormais que cette fonction soit croissante en fonction du nombre de sièges. Si on croit par exemple à la théorie de Gamson-Riker, il se peut très bien qu'un parti trop bien pourvu en sièges ne soit pas invité à faire partie de la coalition gouvernementale. Si l'on suppose que des portefeuilles ministériels sont mieux évalués que de simples sièges de parlementaires, alors il n'est plus dans l'intérêt du parti de gagner trop de sièges ! Nous allons ignorer cette pathologie dans la suite de cette section et nous concentrer sur le cas où l'utilité d'un parti est égale au nombre de sièges remportés par ce parti.

---

d'alliance sans qu'il y ait quoique soit à négocier au sein de celle-ci. Comme nous allons le voir, c'est le cas pour la loi des apparentements introduite en France en 1951. Mais en règle générale, le contexte stratégique de marchandage est beaucoup plus complexe et la modélisation en termes de jeux non-coopératifs devient plus hasardeuse. Même dans le cas de la loi des apparentements introduite en France en 1951, étant donné la multiplicié des alliances possibles, les seules analyses académiques de cete loi utilisent à notre connaissance la théorie des jeu coopératif.

[46] Un mode de scrutin de même nature est utilisé pour élire les conseillers municipaux des agglomértions de plus de 1000 habitants.

[47] Nous allons cependant faire l'impasse dans cette section sur de nombreux aspects de l'analyse des alliances électorales. Par exemple, dans le second cas, nous n'allons pas analyser le jeu de formation des alliances, c'est-à-dire répondre à des questions du type : pourquoi telle alliance se forme-t-elle ou non ? Que peut-on dire des partenaires d'une alliance ? Sont-ils nombreux, idéologiquement proches, etc...? Par voie de conséquence nous ne répondrons pas non plus à des questions comme : dans un système à deux tours pourquoi a t-on parfois des alliances pré-electorales et parfois des alliances intérim-électorales ? La détermination d'un modèle adéquat et général de formation des alliances est une voie de recherche importante et pour tout dire largement inexplorée comme l'est en général la formation des structures de coalitions en théorie des jeux. La majeure partie des travaux dans ce domaine se limite à l'analyse empirique d' hypothèses. Une illustration typique de cette veine de travaux est Blais et Indridason (2007) consacré aux systèmes électoraux à deux tours. Golder (2006) offre une présentation ordonnée et synthétique des contributions à cette littérature. Nous allons donc concentrer notre attention dans le cas des éections régionales sur le partage des gains de la coopération entre les partenaires au sein des alliances.

3.1 Accords bilatéraux de désistement dans un scrutin majoritaire à un tour

Afin d'illustrer la logique des alliances dans le cas d'un scrutin uninominal majoritaire à un tour, condérons l'exemple le plus simple possible, à savoir celui d'un accord entre deux partis, portant sur deux circonscriptions.

Dans le cas bilatéral, disons impliquant les partis A et B, la modélisation d'un accord de désistement portant sur deux circonscriptions à un siège, disons le district 1 et le district 2, est particulièrement simple si le seul enjeu est d'accepter ou non l'accord sans autre forme de compensation : A ne présente pas de candidat dans le district 2 et B ne présente pas de candidat dans le district 1. Dans ce cas, on peut utiliser la modélisation des jeux non-coopératifs, chaque parti devant décider d'accepter ou non l'accord de désistement. En supposant les deux districts statistiquement indépendants et les partis neutres au risque, il suffit de savoir calculer les lois de probabilité des évènements suivants : "en l'absence d'accord, le parti j gagne le district k" (qui se produit avec une probabilité notée p_k^j), "en présence d'un accord, le parti A gagne le district 1" (notée q_1^A), et enfin "en présence d'un accord, le parti B gagne le district 2" (notée q_2^B). Les utilités espérées respectives des deux parties s'écrivent :

$$\text{Pour le parti A} \quad : \quad \begin{cases} p_1^A + p_2^A \text{ en l'absence d'accord} \\ q_1^A \text{ en cas d'accord} \end{cases}$$
$$\text{Pour le parti B} \quad : \quad \begin{cases} p_1^B + p_2^B \text{ en l'absence d'accord} \\ q_2^B \text{ en cas d'accord} \end{cases}$$

Si les partis A et B sont rationnels (dans le cadre de la rationalité précise supposée ici), ils signeront un accord ssi :

$$q_1^A > p_1^A + p_2^A \text{ et } q_2^B > p_1^B + p_2^B$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur un point important qui va refaire surface systématiquement dans le reste de cette section, à savoir que ce calcul reposera inévibalement sur des hypothèses de comportement des électeurs pour les différentes contrefactuelles (ici deux, désistement ou non). Notons également que nous pourrions écrire le problème ci-dessus comme un jeu coopératif à deux joueurs et à utilité non transférable (NTU).

Que se passerait-il si l'on supposait au contraire que les joueurs peuvent transférer leur utilité ? Le jeu de marchandage serait différent. La fonction caractéristique du jeu s'écrirait:

$$\begin{aligned} V(A,B) &= q_1^A + q_2^B \\ V(A) &= p_1^A + p_2^A \\ V(B) &= p_1^B + p_2^B \end{aligned}$$

Le jeu est suradditif ssi :

$$q_1^A + q_2^B > p_1^A + p_2^A + p_1^B + p_2^B$$

Notons que par rapport au cas NTU, les partis ont beaucoup plus de latitude pour négocier les termes résiduels de l'accord. Par exemple ici, la valeur de Shapley Sh - qui est aussi le nucléole et la solution de Nash - suggère :

$$\begin{aligned} Sh_A &= \frac{V(A,B)}{2} + \frac{V(A)-V(B)}{2} \\ Sh_B &= \frac{V(A,B)}{2} + \frac{V(B)-V(A)}{2} \end{aligned}$$

Si les partis sont comparables en l'absence d'accord, c'est à dire si $V(A) \simeq V(B)$, alors $Sh_A \simeq Sh_B$. Ceci est vrai même si $q_1^A \neq q_2^B$. Notons également que dans le cas où par exemple $q_1^A = q_2^B \simeq 1$, $p_1^A = p_2^A = 0.4$ et $p_1^B = p_2^B = 0.1$, la valeur de Shapley $(1.3, 0.7)$ recommande un écart significatif par rapport à la solution $(1,1)$. Cet écart trouve son origine dans le rapport de force, qui est ici à l'avantage du parti A.

Ici on voit que la possibilité de transférer l'utilité change l'issue du marchandage. L'ensemble de marchandage en revanche coïncide avec le coeur et correspond donc à tous les accords respectant les contraintes de rationalité individuelle.

Notons enfin que les rapports de force entre les deux protagonistes peuvent être affectés par leur aversion au risque. Si on note α^A et α^B les utilités de von Neumann-Morgenstern d'un seul siège des partis A et B (après avoir normalisé, sans perte de généralité, respectivement à 2 et 0 les utilités des deux partis pour 2 sièges et 0 siège), les utilités espérées respectives des deux partis s'écrivent dans le jeu NTU :

$$\text{Pour le parti A} \quad : \quad \begin{cases} \left(p_1^A + p_2^A\right) + \left(\alpha^A - 1\right)\left[p_1^A\left(1-p_2^A\right) + p_2^A(1-p_1^A)\right] \text{ en l'absence d'accord} \\ \alpha^A q_1^A \text{ en cas d'accord} \end{cases}$$

$$\text{Pour le parti B} \quad : \quad \begin{cases} \left(p_1^B + p_2^B\right) + \left(\alpha^B - 1\right)\left[p_1^B\left(1-p_2^B\right) + p_2^B(1-p_1^B)\right] \text{ en l'absence d'accord} \\ \alpha^B q_2^B \text{ en cas d'accord} \end{cases}$$

La neutralité au risque se traduit ici par les conditions : $\alpha^A = \alpha^B = 1$, tandis que l'aversion au risque se traduit ici par les conditions : $\alpha^A > 1$ et $\alpha^B > 1$. Si les partis A et B sont rationnels (dans le cadre de la rationalité précise supposée ici), ils signeront un accord ssi :

$$\begin{aligned} q_1^A + \left(\alpha^A - 1\right) q_1^A &> \left(p_1^A + p_2^A\right) + \left(\alpha^A - 1\right)\left[p_1^A + p_2^A - p_1^A p_2^A\right] \\ q_2^B + \left(\alpha^B - 1\right) q_2^B &> \left(p_1^B + p_2^B\right) + \left(\alpha^B - 1\right)\left[p_1^B + p_2^B + p_1^B p_2^B\right] \end{aligned}$$

Notons que par rapport à la situation de neutralité au risque, l'aversion au risque augmente les chances que chaque parti souhaite signer un accord.

Que se passe-t-il à présent dans le jeu TU? La fonction caractéristique s'écrit :

$$V(A,B) = \alpha^A q_1^A + \alpha^B q_2^B$$

$$V(A) = \left(p_1^A + p_2^A\right) + \left(\alpha^A - 1\right)\left[p_1^A\left(1-p_2^A\right) + p_2^A(1-p_1^A)\right]$$

$$V(B) = \left(p_1^B + p_2^B\right) + \left(\alpha^B - 1\right)\left[p_1^B\left(1-p_2^B\right) + p_2^B(1-p_1^B)\right]$$

Si, par exemple, le parti A est très averse au risque, c'est-à-dire ici si $\alpha^A \simeq 2$ et le parti B est presque neutre ($\alpha^B \simeq 1$), la fonction caractéristique s'écrit :

$$V(A,B) = 2q_1^A + q_2^B,$$

$$V(A) = \left(p_1^A + p_2^A\right) + \left[p_1^A\left(1 - p_2^A\right) + p_2^A(1 - p_1^A)\right]$$
$$V(B) = p_1^B + p_2^B$$

Que devient Sh_A ? Clairement Sh_A a augmenté (puisque $V(A,B)$ et $V(B)$ ont tous deux augmenté, alors que $V(B)$ est resté inchangé). Quant à Sh_B, il a varié de

$$\frac{q_1^A - \left[p_1^A\left(1 - p_2^A\right) + p_2^A(1 - p_1^A)\right]}{2}$$

Si $q_1^A > p_1^A\left(1 - p_2^A\right) + p_2^A(1 - p_1^A)$, alors on en déduit que la variation est de signe positif. L'aversion au risque du joueur A a profité au joueur B[48].

3.2 Alliances électorales dans les scrutins plurinominaux : Notations, Définitions et Hypothèses

Nous considérons ici un scrutin plurinominal : n partis sont en compétition dans une circonscription où K sièges sont en jeux. Un bulletin de vote consiste en une liste ordonnée de K candidats. La liste est bloquée : aucune latitude n'est laissée à l'électeur de manisfester une préférence entre les candidats et aucun panachage n'est considéré comme valide. Donc l'électeur peut soit s'abstenir, soit voter blanc, soit voter pour l'une des n listes. Nous allons nous intéresser à des systèmes électoraux dits *mixtes* dans le sens où ils couplent le *principe de proportionnalité* avec un *principe de bonus* : ce n'est pas "the winner-take-all" mais le "winner- take-some". S'agissant du principe de proportionnalité, nous préciserons la formule utilisée pour convertir les votes en voix et l'existence ou non d'un seuil plancher pour être éligible à la représentation. S'agissant du bonus, nous en définirons la nature exacte. Enfin, nous préciserons aussi le nombre de tours prévu par le système électoral et les conditions de participation au second tour.

Alliances réalisables. Avant de spécifier ces détails, il nous reste à définir ce que nous entendrons par alliances possibles. Nous avons déjà évoqué les barrières idéologiques et morales qui peuvent interdir une alliance même si du point de vue d'une rationalité mesurée par le nombre de sièges gagnés, celle-ci se révélerait efficace. Dans cette section, suivant en celà les travaux pionniers de Rosenthal (1968a, 1968b, 1970, 1975) puis Lee et Rosenthal (1976) et Lee, McKelvey et Rosenthal (1979) sur l'analyse des alliances durant la $4^{ième}$ République, nous allons décrire les contraintes externes pesant sur les alliances à l'aide d'un graphe G dont les sommets sont les partis. La présence d'une arête entre les partis i et j sera interprétée comme indiquant que les partis i et j sont en situation de coopérer. Le graphe représente donc sur un plan bilatéral les liens de coopération potentiels entre les partis. Une coalition $S \subseteq N$ est réalisable si le graphe G restreint à S est connexe c'est à dire si pour tout i et j dans S, il existe un chemin dans S c'est à dire une suite de sommets $i_1, i_2, ..., i_k$ telle que que $i_1 = i, i_k = j$ et (i_l, i_{l+1}) soit une arête du graphe pour tout $l = 1, ..., k-1$. Il n'est imposé aucune contrainte sur la longueur k du chemin. Dans cette logique, une coalition

[48]Tout intuitif qu'il soit, ce résultat n'a rien d'universel comme l'illustrent les résultats théoriques de Roth et Rothblum (1982) et Safra, Zhou et Zilcha (1990).

S est réalisable si deux partenaires peuvent se parler par une chaine possiblement longue d'"amis" intermédiaires. Cela est beaucoup moins exigeant que de demander que toutes les paires soient amies c'est à dire que k soit borné par 2.

A titre d'illustration, supposons $n = 5$: extrême gauche, gauche, centre, droite, extrême droite. On peut imaginer le graphe suivant :

$$1, (2, 3), (3, 4), 5$$

Dans ce cas, il y a trois alliances possibles: $\{2, 3\}, \{3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$. Le parti 3 (parti centriste) peut former une grande coalition avec les partis 2 et 4 qui ne peuvent envisager une alliance directe. Naturellement, si l'on impose $k \leq 2$, les seules alliances possibles sont $\{2, 3\}$ et $\{3, 4\}$. La modélisation ci-dessus est adaptée aux contextes politiques dans lesquels il existe un ou plusieurs partis centraux relativement neutres et souples pour servir d'artisan à la formation des alliances. On pourrait d'ailleurs renforcer la définition de faisabilité en demandant qu'une alliance S n'est réalisable que s'il existe au moins un parti $i \in S$ tel que (i, j) est une arête de G pour tout $j \in S$.

Le graphe suivant proposé par Lee, McKelvey et Rosenthal (1979) décrit le graphe G dans le cas des 6 principaux (c'est-à-dire avec une assisse nationale) partis français en 1951.

Insérer figure 1 de Lee, McKelvey et Rosenthal

Dans ce cas, le nombre de partitions possibles des 6 partis en alliances réalisables (en l'absence d'alliances pré-électorales) est égale à 20. Si l'un des partis présente deux listes (ce fut le cas des radicaux et des modérés), le graphe devient plus compliqué. Le graphe ci-dessous représente la situation dans le cas de deux listes radicales et fait passer le nombre de partitions possibles de 20 à 80.

Insérer figure 2 de Lee, McKelvey et Rosenthal

Le Breton et Van Der Sraeten (2013) retiennent une hypothèse particulière sur ce graphe. Ils supposent en effet que l'ensemble des partis est partionné au préalable entre familles ou blocs et qu'une coalition S est faisable ssi S est contenue dans l'un des blocs. Cette hypothèse convient aux situations où le paysage politique est polarisé en blocs idéologiques bien identifiés et où le centre est inexistant ou pour des raisons contextuelles hors course dans le jeu d'alliances. Cela revient à supposer un graphe fait de composantes connexes complètes. La figure ci-dessous représente le graphe dans le cas des élections régionales françaises de 2010 avec $n = 6$.

$$(FG, EELV, PS + PRG), Modem, UMP, FN$$

Le PS et le PRG ont signé un accord pré-electoral. La partition comprend 4 blocs mais un seul bloc, le bloc de gauche, est impliqué dans un jeu d'alliances. En 2004, le graphe le plus approprié est reporté ci-dessous avec $n = 6$.

$$(PC, EELV, PS + PRG), (UDF, UMP), FN$$

Cette fois, il y a deux blocs non triviaux : un bloc de gauche, et un bloc droite-centre (la coopération de l'UDF avec un partie de gauche n'était pas concevable).

Utilités. Nous allons ici nous simplifier considérablement l'analyse en supposant que les partis sont exclusivement interessés par le nombre de sièges gagnés. Cette hypothèse est commune aux travaux de Rosenthal, Lee, Mc Kelvey et Rosenthal précités et à ceux de Le Breton et Van Der Straeten. Comme on le notera en reproduisant plus bas des extraits de la presse commentant les élections régionales françaises de 2010, cette hypothèse est tout à fait raisonnable dans de nombreux contextes.[49]

Notons que n'est pas été ajouté dans la fonction d'utilité d'argument spécifiant si un parti participe ou non à l'exécutif (c'est-à-dire obtient les postes de reponsabilité qui lui sont attachés tels que la présidence et certaines vice-présidences). Puisqu'avoir plus de sièges améliore ses chances de participer à l'exécutif, en poursuivant un objectif (maximiser son nombre de sièges), il poursuit de facto l'autre : il n'y a aucun arbitrage. Il serait néanmoins possible d'avoir un objectif prenant explicitement en compte la formation de l'exécutif et où, contreirement à ce que nous supposons ici, tous les sièges n'ont pas la même valeur.

En évaluant l'opportunité d'alliances pré-électorales ou intérim-électorales, les partis sont exposés à une incertitude plus ou moins forte. En complément de ce qui a été dit sur les fonctions d'utilité, il faudrait donc modéliser cette incertitude et spécifier l'attitude des partis face à ces risques. Une grande partie de cette incertitude trouve sa source dans le comportement des électeurs. Dans cet article, nous allons passer sous silence cette question[50].

Suradditivité, Vote des Electeurs et Contrefactuelles. Toute réflexion sur une alliance oblige les partis politiques qui la préparent à anticiper: (1) ce que vont faire les autres partis et (2) ce que vont faire les électeurs. Laissons de côté pour l'instant le premier point pour nous concentrer sur le second.

S'il s'agit d'une alliance pré-électorale (s'il n'y a qu'un seul tour, il s'agira forcément d'une alliance pré-électorale), les partis doivent prévoir la réaction des électeurs pour chaque *contrefactuelle d'alliance* (nous employons le mot contrefactuelle parce que par définition, les

[49] Cependant, elle ne l'est pas toujours, comme le démontre par exemple l'appel au désistement des responsables nationaux de gauche au leader de la liste PS dans le région Alsace lors les élections régionales françaises de 2015. En se maintenant, la liste PS faisait courir le risque de voir le FN contrôler l'exécutif. Si cet élément est un argument de la fonction d'utilité des partis, l'utilité U_i du tout parti i différent du FN pourrait s'écrire:

$$U_i = \begin{cases} \text{(nombre de sièges remportés par } i \text{) si le FN ne contrôle pas l'exécutif} \\ \text{(nombre de sièges remportés par } i) - \theta_i \text{ si le FN contrôle l'exécutif} \end{cases}$$

où θ_i est la pénalité (perte d'utilité associée à l'électin du FN). Supposons qu'en ce maintenant le parti i gagne w_i sièges et que la probabilité d'un controle de l'exécutif par le FN soit π et qu'en se désistant il diminue cette probabilité au niveau $\pi' < \pi$. Il choisira de le faire si $w_i - \pi\theta_i < -\pi'\theta_i$ c'est à dire lorsque :

$$\pi - \pi' > \frac{w_i}{\theta_i}$$

Si par exemple, $\pi = 1$et $\pi' = 0$, il le fera lorsque les gains en sièges ne peuvent pas compenser la victoire du FN.

[50] Nous ne connaissons aucun travail d'analyse des alliances traitant la question de l'incertitude. Certes, comme nous l'avons suggéré plus haut la présence de risque, et la plus ou moins grandre aversion des négociateurs à celui-ci, sont des élements importants à prendre en compte pour comprendre l'issue du marchandage.

données empiriques ne contiendront qu'un seul scénario). Par exemple si en France le PS et le PRG forment une alliance pré-électorale, ils doivent imaginer ce qui se serait passé en matière de comportement électoral s'ils avaient choisi de se présenter séparément. Au nombre des questions importantes figure en particulier celle-ci : le total dessièges récoltés avec alliance dépasse t-il le total en l'absence d'alliance ? Autrement dit, dans le jargon de la théorie des jeux coopératifs, le jeu d'alliance entre ces deux joueurs est-il *suradditif* ? Tout dépendra du mode de scrutin et du comportement des électeurs. En faveur de la suradditivité, on peut dire que si les électeurs votent pour leur parti préféré (allié ou pas) et suivent les consignes de vote de leurs leaders, alors la suradditivité est garantie; elle sera même stricte dans des circonstances où les voix du plus petit partenaire seraient perdues sans alliance (dans un système avec des seuils de représentation). En défaveur de la suradditivité, on peut lister les configurations où certains électeurs ne se reconnaissent pas dans l'alliance (la jugeant par exemple contre nature) et préférent s'abstenir plutôt que de voter pour elle. Dans un cadre multilatéral, disons pour faire simple impliquant trois partis, les mêmes questions se posent mais la combinatoire devient plus compliquée. Le nombre de contrefactuelles passe de 2 à 5. De plus, si l'un d'entre eux examine l'opportunité d'une alliance avec les deux autres, il doit anticiper ce que ceux-ci vont faire s'il décide de rester seul. On retrouve une question analogue au point (1) évoqué ci-dessus.

S'il s'agit d'une alliance intérim-électorale (ce qui signifie que le système électoral oblige, dans certains cas, l'organisation de deux tours), les mêmes questions se posent avec toutefois une différence importante. Le système électoral peut en effet imposer des contraintes sur la formation des alliances au stade intérim qui (par définition) n'existaient pas au stade ex ante. Nous verrons cet effet à l'oeuvre dans notre seconde application.[51]

Par analogie avec la célèbre distinction de Duverger entre les effets psychologiques et les effets mécaniques des modes de scrutin, il peut être utile de distinguer sur le plan conceptuel la *suradditivité psychologique* et la *suradditivité mécanique* du jeu, même s'il est difficile de les séparer en pratique. La *suradditivité psychologique* concerne la comparaison en termes de voix obtenues par les diverses coalitions, et repose sur le seul comportement des électeurs. La *suradditivité mécanique* repose sur le système lui-même une fois connues les voix obtenues par les différents partis. Les seuils de réprésentation et la présence d'un bonus en sièges pour la liste arrivée en tête peuvent être, comme nous le verrons dans les deux prochaine ssections, des sources très importantes de suradditivité mécanique. De manière plus subtile, il est également important de noter, à propos de cette suradditivité mécanique, que les sièges sont des nombres entiers et que la proportionnalité exacte ne peut que très rarement être obtenue.

Nous ignorerons cette dernière question dans les deux prochaines sections pour nous concentrer sur les seuils et les bonus. Dans la mesure où il s'agit d'une question importante, nous lui consacrons le reste de cette section. Puisque les sièges sont des nombres entiers,

[51]Notons également que dans le cas des alliances intérim électorales, la nature de l'information dont disposent les partis pour prédire les conséquences des diverses contrefactuelles est quelque peu différente. En effet, cette fois-ci, il s'agit de prévoir ce que les électeurs vont faire dans telle ou telle configuration d'alliance, *sachant comment ils ont voté au premier tour* : il s'agit de prévisions *conditionnelles* aux résultats du premier tour décrite par une famille (une par contrefactuelle) de *matrices de transferts de voix*.

il faut choisir une formule de conversion des voix en sièges qui prennent en compte cette contrainte (la proportionnalité "pure" ne pouvant être atteinte en pratique). Il existe de mutiples façons de décliner dans le détail la proportionnalité et de nombreuses méthodes concurrentes ont été proposées : Hamilton (plus fort reste), Jefferson/d'Hondt (plus forte moyenne), SainteLaguë/Webster étant sans nul doute aujourd'hui les trois plus utilisées[52]. Si deux partis unissent leurs voix, est-il vrai que le nombre total de sièges obtenus dépasse le total lorsqu'ils restent séparés ? Balinski et Young (1979) ont démontré que la méthode Jefferson/d'Hondt (plus forte moyenne) est la seule (modulo des qualifications mineures) qui garantisse cette propriété. Le gain en sièges est borné par 1. Pour la voir en action considérons le profil de votes fictif ci-dessous dans le cadre d'une circonscription où 7 sièges sont à répartir suivant la méthode d'Hondt sans seuils planchers[53] :

Abstention	*FG*	*EELV*	*PS*	*UMP*	*FN*
3100	600	900	2000	2800	600

Le tableau des moyennes successives qui en découle est le suivant :

Diviseurs	1	2	3	4	5
UMP	**28**	**14**	**9.33**	**7**	.
PS	**20**	**10**	6.66	5	.
EELV	**9**	4.5	3	2.25	.
FG	6	3	2	1.5	.
FN	6	3	2	1.5	.

où le diviseur électoral est 7. On en déduit que l'UMP gagne 4 sièges, le PS 2 sièges et EELV 1 siège. Si le PS et EELV font alliance, le tableau ci-dessus devient :

Diviseurs	1	2	3	4	5
UMP	**28**	**14**	**9.33**	7	.
$PS + EELV$	**29**	**14.5**	**9.66**	**7.25**	.
FG	6	3	2	1.5	.
FN	6	3	2	1.5	.

où le diviseur électoral est 7.25. L'UMP perd 1 siège et l'alliance PS+EE en gagne 1.

Par récurrence, la propriété de suradditivité s'étend à n'importe quel nombre d'alliés. Et avec plus de deux alliés, le gain peut être bien supérieur à 1. L'exemple suivant dû à Kharpov (2015) illustre ce point. Supposons $n = 2x + 1$ où x est entier supérieur ou égal

[52]Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages remarquables de Balinski et Young (2001) et Pukelsheim (2014) pour un exposé complet et approfondi de ce sujet.

[53]On rappelle que le système D'Hondt fonctionne de la manière suivante.

(1) On divise le nombre de voix en faveur de chaque parti, successivement par 1, 2, 3, 4, 5, etc.

(2) Les résultats de cette division, appelés les quotients électoraux, sont ensuite classés par ordre de grandeur pour tous les partis jusqu'à obtenir autant de quotients qu'il y a de sièges à attribuer. Le dernier quotient est appelé le diviseur électoral.

(3) Le nombre de sièges obtenus par chacun des partis est égal au nombre de fois que le nombre de ses voix peut être divisé par le diviseur électoral.

à 3. Supposons que tous les $n-1=2x$ premiers partis (les petits partis) reçoivent $x+1$ voix et que le dernier parti (le gros parti) reçoive $2x^2-4x$ voix. Le nombre total de voix est égal à $4x^2+2x$. Si le nombre total de sièges est égal à $4x^2-4x-1$, on vérifiera que la méthode d'Hondt alloue x sièges aux $n-1$ premiers partis et $2x^2-4x-1$ au dernier. Kharpov montre que $x \geq 3$ implique que si les $n-1$ petits partis s'allient, ils gagnent au moins $x-2$ sièges supplémentaires. En revanche, si d'autres partis en dehors de l'alliance considérée s'allient à leur tour, le résultat devient incertain[54] (une lotterie, pour reprendre l'expression de Leutgäb et Pukelsheim (2009)).

A cet effet de la formule elle même d'Hondt, vient s'ajouter l'effet de suradditivité résultant de la présence éventuelle de seuils. Pour le voir en action, on peut reprendre l'exemple fictif ci-dessus avec cette fois un seuil de 10% des inscrits et 6 sièges à pourvoir. En l'absence d'alliance, seuls le PS et l'UMP reçoivent des sièges. Le tableau des diviseurs s'écrit :

Diviseurs	1	2	3	4	5
UMP	**28**	**14**	**9.33**	**7**	.
PS	**20**	**10**	6.66	5	.

où le diviseur électoral est 7. L'UMP recoit 4 sièges et le PS en recoit 2. Si le PS forme une alliance avec EELV, le tableau devient:

Diviseurs	1	2	3	4	5
UMP	**28**	**14**	**9.33**	7	.
PS + EELV	**29**	**14.5**	**9.66**	7.25	.

où le diviseur électoral est 9.33. L'alliance PS+EELV enregistre un gain d'un siège. S'ils étendent leur alliance à FG, le tableau devient:

Diviseurs	1	2	3	4	5
UMP	**28**	**14**	**9.33**	7	.
PS + EELV + FG	**35**	**17.5**	**11.66**	8.25	.

On constate que cet allié additionnel ne rapporte aucun siège supplémentaire à l'alliance. Si en revanche son nombre de voix était de 900 et que l'absention chutait à 2800, alors le tableau deviendrait:

Diviseurs	1	2	3	4	5
UMP	**28**	**14**	9.33	7	.
PS + EELV + FG	**38**	**19**	**12.66**	**9.5**	.

où le diviseur électoral est 9.5. L'allié additionnel rapporterait 1 siège de plus. Dans ce cas, comme dans le premier, les voix perdues en raison de l'effet de seuil, sont utiles lorsqu'elles sont récupérées et converties en sièges.

[54] Sur ce point on pourra consulter outre Kharpov, Bochsler (2010) et Leutgäb et Pukelsheim (2009).

3.3 La Loi Electorale Française du 9 Mai 1951, dite "Loi des Apparentements"

Notre première application de ces outils va porter sur une loi électorale française, dite *loi des apparentements*, votée en mai 1951 c'est à dire durant la $4^{ième}$ République et utilisée pour les élections législatives de 1951 et 1956. Décrivons rapidement les principales spécificités de cette loi électorale. Le district électoral est le département qui dispose d'un nombre de sièges de députés approximativement proportionnel à sa population. Il s'agit d'un scrutin plurinominal à un tour et les sièges sont alloués en utilisant la méthode d'Hondt/Jefferson. Il y a cependant une nuance de taille qui le différencie du système proportionnel conventionnel. La loi offre aux partis la possibilité de s'apparenter pour former un apparentement. Les électeurs choisissent une liste attachée à un parti mais les voix obtenues sont comptabilisées au niveau des apparentements. Deux éventualités peuvent se présenter. Ou bien, un apparentement totalise plus de la moitié des suffrages exprimés. Dans ce cas, on lui alloue la totalité des sièges de la circonscription qui sont ensuite répartis entre les partis de cet apparentement selon la méthode d'Hondt. Ou bien aucun apparentement ne recueille la majorité absolue. Et dans ce cas, on applique la méthode d'Hondt une première fois pour allouer à chaque apparentement son total de sièges. Puis, on applique une seconde fois la méthode d'Hondt pour répartir les sièges au sein de chaque apparentement.[55]

Un apparentement est, dans notre terminologie, une alliance pré-electorale. Il y a ici deux élements de suradditivité mécanique. Le premier découle de l'usage de la méthode d'Hondt qui encourage la formation d'alliances (ainsi que nous l'avons vu dans la sections précédente). Le second prend sa source dans la violation du principe de proportionnalité qui consiste à donner la totalité des sièges à l'apparentement vainqueur si son score global dépasse 50%. Tout ceci plaide en faveur de la formation d'alliances[56]. De plus les apparentements disposent de peu d'instruments pour faire avancer le marchandage puisque les sièges sont alloués mécaniquement au sein de chacun d'entre eux.

[55]Un système similaire a été proposée en Italie en 1953 mais avec une différence cruciale : il fonctionnait au niveau national et pas départemental. Ce mécanisme, tel qu'envisagé par le gouvernement de la majorité centriste d'Alcide De Gasperi, avait prévu l'affectation des deux tiers des sièges à la Chambre des députés à tout groupe de listes apparentées ayant obtenu au moins 50 % des voix nationales. Ce système, qui était fortement contesté par les forces de gauche qui l'appelaient Loi Escroquerie, a été saboté par l'ensemble des partis d'opposition, et la majorité gouvernementale n'a reçu que 49 % des voix aux élections législatives de 1954.

La pratique de l'apparentement se trouve aussi ailleurs. On le trouve en Uruguay. La "ley de lemas" (grandement modifiée par la réforme constitutionnelle de 1997) permet à chaque liste électorale de s'apparenter avec d'autres listes (lemas) pour former des sublemas. De plus, au sein de chaque parti politique uruguayen, les listes sont automatiquement considérées comme apparentées. En Belgique, des apparentements sont possibles pour les élections au Parlement wallon (entre les arrondissements électoraux de la même province) et pour les élections provinciales (entre les districts électoraux du même arrondissement électoral). L'apparentement était aussi possible pour les élections à la Chambre des représentants entre 1919 et 1999 et dans les trois circonscriptions de Nivelles, Louvain et Bruxelles-Hal-Vilvorde entre 2003 et 2010. On peut aussi évoquer dans cette rubrique le "kartel" en Flandre Belge et le "lijstverbinding" aux Pays-Bas.

[56]Rappelons cependant, comme cela a déjà été mentionné lors de notre discussion de la méthode d'Hondt, que les gains d'une alliance peuvent être anéantis, voire renversés, lorsque d'autres alliances se forment.

Avant de procéder à une exploration théorique de cette question, il est utile de placer la question dans son contexte[57] et de regarder ce qui s'est passé. Le tableau ci-dessous emprunté à Campbell (1951) décrit le nombre de députés des 6 grands partis avant l'élection (A) (méthode d'Hondt sans apparentement), après l'élection (B), ceux qu'ils auraient été avec la méthode d'Hondt sans apparentement (C) et ceux qu'ils auraient été avec la méthode d'Hamilton sans apparentement (D). Les quatre premières colonnes correspondent aux quatre parties les plus au centre (à l'initiative de cette loi), la cinquième au Parti communiste, et la dernière au Rassemblement du peuple français (gaulliste).

	COM	SOC	RAD	MRP	MOD	RPF
A	189	99	59	156	94	24
B	103	107	89	96	110	120
C	180	86	60	67	88	144
D	159	93	65	81	94	133

Si l'on considére les contrefactuelles utilisées par Campbell comme raisonnables[58], les conséquences de la réforme électorale sont éloquentes. Les quatre partis les plus au centre ont désormais une large majorité de contrôle qu'ils n'avaient pas et qu'ils n'auraient pas eu si la méthode d'Hondt n'avait pas été accompagnée par l'option d'apparentement. Sur les 95 circonscriptions, il n'y a eu aucun apparentement dans 12 et 2 apparentements concurrents dans 5 autres. Les configurations sont reportées dans le tableau suivant :

Type d'alliance	Nombre
SOC, RAD, MRP, MOD	36
SOC, RAD, MRP	14
Autres alliances incomplètes des centres	25
RPF et RAD, MRP ou MOD	13

Auraient-ils pu faire mieux ? Dans 33 circonscriptions, les alliances centristes ont emporté la majorité absolue. Dans 21 autres circonscriptions, les partis centristes n'ont pas obtenu la majorité absolue malgré leur union. Leur désunion les a empêchés de l'emporter dans 32 autres circonscriptions où, s'ils avaient été apparentés, ils auraient eu la majorité absolue. Ils ont également été désunis dans 9 autres circonscriptions où leur total de voix n'était pas suffisant pour leur assurer la majorité absolue, mais où l'union leur aurait valu de gagner quelques sièges marginaux. En d'autres termes, d'aprés Campbell, "les partis du centre ont enlevé tous les sièges dans un tiers des circonscriptions (...); ils auraient pu obtenir tous les sièges dans un autre tiers s'ils avaient été unis; dans le dernier tiers, ils n'ont pas réussi à

[57] Elle a été mise en place par les partis de la Troisième Force (partis du centre) pour réduire l'influence du Parti communiste français et du Rassemblement du peuple français (gaulliste) à l'Assemblée nationale. Les apparentements étaient permis seulement dans 95 circonscriptions et non la totalité des 103 circonscriptions. De plus dans ces circonscriptions résiduelles, la méthode d'Hondt était remplacée par la méthode d'Hamilton qui favorise les petits partis !

[58] Il écrit: "Bien entendu, ces calculs ne sont possibles qu'en partant de l'hypothèse que les électeurs n'auraient pas voté de façon différente si la loi ou la tactique des partis avaient été elles-mêmes différentes".

réussi à obtenir la majorité absolue". Campbell dérive les gains et pertes en sièges d'une union totale du centre dans le cas d'une stratégie d'union maximale:[59]

$$\begin{array}{ccc} SOC+24 & MRP+16 & COM-22 \\ RAD+13 & MOD+16 & RPF-47 \end{array}$$

Il est bien entendu difficile d'expliquer les apparentements observés d'autant plus que si l'on se réfère à Campbell, la stratégie des partis du centre ne semble pas optimale. Notre analyse de ce jeu d'alliances reposera pour l'essentiel sur l'article de Lee, McKelvey et Rosenthal (1979). Les hypothèses sur les utilités et l'incertitude sont complètement alignées sur celles qui ont été formulées plus haut avec comme alliances réalisables celles résultant du graphe décrit précédemment. Le calcul mécanique des sièges obtenus pour chaque profil de voix et chaque structure d'apparentements est efffectué selon un algorithme appelé *algorithme d'apparentement* par Lee, McKelvey et Rosenthal.

Afin de bien comprendre ce qu'implique la notion de suradditivité, notons que si le jeu est suradditif, la suradditivité *à l'échelle des partis* n'est pas garantie. Pour le voir, considérons le département du Calvados en 1951. Les résulats des votes entre les principaux partis sont consignés dans le tabeau ci-dessous,dans le lequel les partis sont classés par ordre idéologique, où la première colonne (COM) correspond au parti communiste, les quatre suivantes aux quatre partis les plus au centre (à l'initiative de cette réforme électorale), et la colonne RPF correspond au Rassemblement du peuple français (gaulliste) :

COM	*SOC*	*RAD*	*MRP*	*MOD*	*RPF*	*Divers*
29139	18431	10788	20512	28593	43986	26201

Il y a avait 5 sièges à pourvoir. Les trois partis RAD, MRP et MOD décidèrent de s'apparenter. Aucun apparentement n'obtint la majorité absolue. L'application de l'algorithme donna le résultat ci-dessous:

COM	*SOC*	*RAD*	*MRP*	*MOD*	*RPF*	*Divers*
1	0	0	1	1	1	1

On peut se demander ce qui se serait passé si un ou plusieurs apparentements avaient vu le jour. Nous avons reproduit les calculs de l'algorithme pour quelques structures d'apparentements, dont celle observée (dans la première ligne du tableau), et non la totalité des 20 structures

[59] Il se livre également à plusieurs autres calculs de contrefactuelles dont celle-ci: quelle aurait été la répartition des sièges si la clause de bonus en cas de majorité absolue n'avait pas été introduite dans la lois des apparentements ? Il montre que non seulement le bloc centriste aurait gagné beaucoup moins de sièges mais aussi que l'équilibre entre le bloc laïc (SOC, RAD) et le bloc "catholique" (MRP, MOD, RPF) aurait été perturbé à l'avantage des laïcs.

possibles.

Apparentement	COM	SOC	RAD	MRP	MOD	RPF	$Divers$
(RAD, MRP, MOD)	1	0	0	1	1	1	1
$Aucun$	1	0	0	0	1	2	1
(RAD, MRP, MOD, RPF)	0	0	0	1	1	3	0
(SOC, RAD, MOD)	1	1	0	0	1	1	1
(SOC, RAD, MOD, MRP)	1	0	0	1	1	1	1

On constate tout d'abord un effet de superadditivité global : lorsqu'un apparentement se forme, le nombre total de sièges gagnés par ces partis ne baisse pas. Par exemple, en comparant les lignes 1 et 2, on voit que la formation de l'apparentement (RAD, MRP, MOD) a permis à cette coalition de partis d'engranger un siège supplémentaire qui profite au MRP. Ici, les gains à la coopération ne peuvent pas être redistribués entre les partenaires de manière arbitraire. On a ici un jeu coopératif NTU et cela peut avoir des conséquences surprenantes. Il se peut que l'élargissement d'un apparentement à de nouveaux membres diminue le nombre de sièges de membres en place. Par exemple dans le tableau ci-dessus, en passant de l'avant dernière ligne à la dernière, le total des sièges n'a pas baissé mais SOC a perdu son siège au profit du MRP.[60]

Dans l'analyse de ce cas, comme dans leur analyse complète, Lee, McKelvey et Rosenthal font implicitement des hypothèses très précises et très fortes sur le comportement des partis et le traitement de l'incertitude. Tous les calculs ci-dessus sont basés sur les voix observées. Les partis ont donc parfaitement anticipé les votes des électeurs. Mais plus encore, leur traitement implicite des contrefactuelles montre qu'ils supposent que pour les différentes structures d'apparentement, les électeurs continuent de voter pour la même liste. Il n'est pas évident que le choix des électeurs soient insensibles aux apparentements : un électeur peut ne pas aimer certains partenaires et décider de s'abstenir. Un électeur peut également voter sincère parfois et utile/stratégique en d'autres occasions. Par exemple, un électeur de SOC peut voter sincère dans le cas de l'apparentement (SOC, RAD, MOD) et voter RAD dans le cas de l'apparentement (SOC, RAD, MOD, MRP).

[60]Il n'y pas de contradiction avec ce que nous avons dit à propos de la méthode d'Hondt. Lee, Mckelvey et Rosenthal n'expliquent pas la raison subtile de cette "pathologie". Elle tient au fait que la méthode d'Hondt ne vérifie pas la propriété suivante. Si on applique d'Hondt une première fois aux partis, chacun d'entre eux se voit alloué un certain nombre de sièges. Supposons que pour une coalition de partis, on fasse le total des sièges ainsi reçus et que l'on applique une seconde fois d'Hondt à ce total, en ne considérant, bien entendu, que les partis de cette coalition. Va-t-on retomber sur les chiffres de départ ? A l'aide d'exemples, le lecteur vérifiera que ce n'est pas toujours le cas. Si la méthode avait vérifié cette propriété d'idempotence, la pathologie n'aurait pas été présente. En effet, puisque l'apparentement augmente le total des sièges de la coalition et que la méthode d'Hondt ne souffre pas du paradoxe de l'Alabama, on en aurait conclu qu'aucun membre de la coalition ne perdait de sièges dans ce regroupement. (Le paradoxe de l'Alabama est, dans un système électoral, un paradoxe de partage où, en augmentant le nombre total de sièges à pourvoir, on diminue le nombre de sièges alloués à l'une des parties en présence.) Notons enfin que le grand apparentement (RAD, MRP, MOD, RPF) permet à ses membres, puisqu'il est majoritaire en voix, d'engranger 2 sièges supplémentaires.

Voyons comment conduire l'analyse des alliances dans le cadre de ces hypothèses. Pour chaque département et chacune des 20 structures d'apparentements possibles, il faut calculer à l'aide de l'algorithme le nombre de sièges gagnés par chacun des 6 principaux partis. Le tableau ci-dessous reproduit ce travail dans le cas du département de l'Aisne où il y avait en 1951, 6 sièges à pourvoir (l'ordre des coordonnées est l'ordre idéologique : $COM, SOC, RAD, MRP, MOD, RPF, DIV$)[61]:

Vecteurs de Sièges	Structures d'Apparentements
$S_1 = (3,1,1,0,0,1)$	$A_1 = (COM, SOC, RAD, MRP, MOD, RPF)$
$S_2 = (3,1,1,0,0,1)$	$A_2 = (COM, (SOC, RAD), MRP, MOD, RPF)$
$S_3 = (3,1,1,0,0,1)$	$A_3 = (COM, SOC, (RAD, MRP), MOD, RPF)$
$S_4 = (3,1,1,0,0,1)$	$A_4 = (COM, SOC, (RAD, MOD), MRP, RPF)$
$S_5 = (3,1,0,1,0,1)$	$A_5 = (COM, SOC, RAD, (MRP, MOD), RPF)$
$S_6 = (3,1,0,0,0,2)$	$A_6 = (COM, SOC, RAD, MRP, (MOD, RPF))$
$S_7 = (2,1,1,1,0,1)$	$A_7 = (COM, (SOC, RAD), (MRP, MOD), RPF)$
$S_8 = (2,1,1,0,0,2)$	$A_8 = (COM, (SOC, RAD), MRP, (MOD, RPF))$
$S_9 = (2,1,1,0,0,2)$	$A_9 = (COM, SOC, (RAD, MRP), (MOD, RPF))$
$S_{10} = (2,1,1,1,0,1)$	$A_{10} = (COM, (SOC, RAD, MRP), MOD, RPF)$
$S_{11} = (2,1,1,0,1,1)$	$A_{11} = (COM, (SOC, RAD, MOD), MRP, RPF)$
$S_{12} = (2,1,1,0,0,2)$	$A_{12} = (COM, (SOC, RAD, MRP), (MOD, RPF))$
$S_{13} = (2,1,1,1,0,1)$	$A_{13} = (COM, SOC, (RAD, MRP, MOD), RPF)$
$S_{14} = (2,1,1,0,0,2)$	$A_{14} = (COM, SOC, MRP, (RAD, MOD, RPF))$
$S_{15} = (2,1,0,1,0,2)$	$A_{15} = (COM, SOC, RAD, (MRP, MOD, RPF))$
$S_{16} = (2,1,1,0,0,2)$	$A_{16} = (COM, (SOC, RAD), (MRP, MOD, RPF))$
$S_{17} = (2,1,1,1,0,1)$	$A_{17} = (COM, (SOC, RAD, MRP, MOD), RPF)$
$S_{18} = (2,1,1,0,0,2)$	$A_{18} = (COM, (RAD, MRP, MOD, RPF), SOC)$
$S_{19} = (0,2,1,0,1,2)$	$A_{19} = (COM, (SOC, RAD, MOD, RPF), MRP)$
$S_{20} = (0,1,1,1,0,2)$	$A_{20} = (COM, (SOC, RAD, MRP, MOD, RPF))$

On pourrait définir un concept de structure stable d'apparentement en s'appuyant sur des notions d'entrées et de sorties individuelles ou collectives profitables et faisables. A notre connaissance, personne ne s'est livré à ce travail qui s'appuie sur le concept de fonction de partition et non de fonction caractéristique. Nous allons ici suivre Lee, Mc Kelvey et Rosenthal et construire la fonction caractéristique d'un jeu coopératif NTU à 6 joueurs. Faute d'espace, nous n'allons pas pouvoir détailler toutes les étapes de la construction mais esquisser celles-ci. Par exemple, dans le cas de l'Aisne, on peut se demander quels sont les vecteurs d'utilité que peut se garantir la coalition (MRP, MOD, RPF). Dans la table seules les structures A_{15} et A_{16} sont concernées[62] et le pire scénario est A_{16}, c'est à dire la formation de l'apparentement (SOC, RAD). Ici la coalition (MRP, MOD, RPF) ne peut se garantir que le vecteur $(0, 0, 2)$.

[61]Le vecteur des votes observés était :

COM	*SOC*	*RAD*	*MRP*	*MOD*	*RPF*	*Divers*
73986	35712	21586	19245	18399	42712	6282

[62]Les structures comme la structure A_7 ne sont pas autorisées car il faudrait contractualiser l'engagement du RPF à ne participer à aucun apparentement.

La construction de la fonction caractéristique repose sur un théorème important démontré par les auteurs. Ce théorème énonce que pour toute structure d'apparentements A et pour toute coalition T dans cette structure, si l'apparentement dans $N \backslash T$ devient moins fin (c'est-à-dire si certains apparentementsse regoupent pour former de plus gros apparentements) alors toutes les coordonnées du vecteur S en restriction à T diminuent faiblement. Par conséquent, la formation d'apparentements en dehors de la coalition T est toujours défavorable à tous les membres de la coalition T. L'implication immédiate de ce théorème est que pour toute coalition T, il existe un unique vecteur de sièges, noté S^T, qui est garanti. Par conséquent, la fonction caractéristique V de ce jeu NTU[63] est definie comme suit :

$$V(T) = \begin{cases} \left\{u \in x \in \mathbb{R}^T : u_i \leq S_i^T \text{ pour tout } i \in T\right\} \text{ si } T \text{ est un apparentement faisable} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Une fois la fonction caractéristique construite, peut-on se servir (et si oui comment) de ce cadre d'analyse pour analyser la formation des apparentements ? Pour ce faire, Lee, McKelvey et Rosenthal suggèrent de retenir *le coeur* comme concept de solution. Etant donné la nature très spéciale de la fonction caractéristique, cela revient à considérer directement une relation de dominance $\succ$ sur les vecteurs S décrivant les répartitions de sièges entre les n partis attachées aux structures d'apparentement faisables, où :

$$S' \succ S \text{ ssi il existe un apparentement faisable } T \text{ tel que } S'_i > S_i \text{ pour tout } i \in T \text{ et } S' \in V(T)$$

Un vecteur S est dans le coeur s'il n'existe pas T et $S' \in V(T)$ tel que $S' \succ S$. Lee, Mc Kelvey et Rosenthal démontrent que si le coeur est non vide, il consitue l'unique solution de VonNeumann-Morgenstern du jeu.

Pour tester empiriquement cette solution ils retiennent pour l'essentiel 58 districts sur les 95 possibles dans les données électorales de 1951. Dans les autres districts, les partis nationaux RAD et MOD ont parfois présenté plusieurs listes et dans certains districts certains partis presentaient déjà une liste jointe. Dans certains tests, ils retiennent 25 districts (où il y a deux RAD ou deux MOD) en plus des 58. Pour les 58 districts, le nombre total (c'est-à-dire en agrégeant l'ensemble des 58 départements) de structures d'apparentements faisables est égal à 805 et le nombre total de vecteurs de sièges attachés vaut quant lui 253. Dans les 58 districts, le coeur est non vide mais contient 762 structures d'apparentements auxquels correspondent 237 vecteurs de sièges. Dans 48 districts, le coeur contient même la totalité des structures d'apparentements possibles. Le pouvoir préditif du coeur est donc bien faible. Lee , McKelvey et Rosenthal attribuent la responsabilité de cette défaillance au caractère strict de la relation de dominance qui effectivement ici enlève de la force au coeur. Ils suggérent de passer à une version faible de cette relation de dominance qui demande que toutes les inégalités soient faibles et qu'une inégalité au moins soit stricte. Comme solution, ils retiennent la solution de Von Neumann-Morgenstern . Notons que cette solution n'est plus forcément unique et ilsla calculent département par département pour obtenir que cette

[63] Il s'agit donc d'un jeu coopératif NTU très particulier, appelé, *jeu hédonique* (Banerjee, Konishi et Sönmez (2001), Bogomolnaia et Jackson (2002), Drèze et Greenberg (1980), Le Breton, Ortuno-Ortin et Weber (2008)).

fois cette solution ne retient que 235 structures d'apparentements sur les 805 possibles. Lee, McKelvey et Rosenthal concluent par une analyse statistique plus fine des données observées et concluent que la nouvelle version de la solution de Von Neumann-Morgenstern a un succès modéré.

3.4 L'Election des Conseillers Régionaux Français Depuis 2004

Depuis 2004, et à deux reprises depuis lors (2010 et 2015), les conseillers régionaux français sont élus à l'aide d'un système électoral sophistiqué qui a remplacé l'application de la méthode d'Hondt avec seuils planchers qui prévalait jusqu'alors (elle fût utilisée pour la dernière fois en 1998). Le nouveau système électoral est un système plurinominal à deux tours combinant une dose de proportionnelle, des seuils planchers, un bonus au vainqueur et des possibilités de fusion de listes entre les deux tours (et donc d'accès au second tour) qui en font le candidat idéal pour une étude des alliances électorales. Cette exploration est entreprise par Le Breton et Van der Straeten (2013) et nous reprenons dans cette section certains éléments de leur analyse.

Description du mode de scrutin. Le système fonctionne globalement comme suit. Une circonscription électorale est une région et le nombre de sièges à pourvoir (c'est à dire le nombre de conseillers régionaux) est noté K. Au premier tour les n partis en compétition présentent une liste ordonnée[64] de K noms. Les électeurs qui participent au vote[65] ont donc le choix entre n listes (pas de panachage). Si une liste remporte plus de la moitié des suffrages exprimés, c'est à dire fait un score supérieur à 50%, il n'y a pas de second tour. La liste arrivée en tête remporte le quart des sièges, c'est-à-dire $\frac{K}{4}$, et les trois quarts restants, c'est-à-dire $\frac{3K}{4}$, sont répartis entre toutes les listes ayant un score au moins égal à 5% selon la méthode d'Hondt. Sinon, un second tour est organisé. Les listes ayant fait au premier tour un score au moins égal à 10% peuvent y participer sans conditions[66]. Les listes ayant fait au premier tour un score inférieur à 5% sont définitivement éliminées. Les listes ayant fait un score compris dans l'intervalle $[5\%, 10\%]$ peuvent continuer sous réserve de fusionner avec une liste ayant fait un score au moins égal à 10%. S'agissant des fusions, rien n'interdit à plusieurs listes de fusionner (par exemple une liste à plus de 10% peut inviter deux listes entre 5 et 10% à fusionner avec elle) et des listes à plus de 10% peuvent fusionner entre elles. Entendons-nous bien sur le sens du mot fusion. Puisque le nombre de noms sur la liste fusionnée est égal à K, certains noms des listes du premier tout doivent disparaître : si par exemple 3 listes "fusionnent", $\frac{2}{3}$ des $3K$ candidats qui figuraient sur ces listes au premier tour ne participeront pas au second tour. Au terme du décompte des voix au second tour, les sièges sont attribués selon les mêmes règles qu'au premier tour.

Quelques remarques sur le mode de scrutin. Ce système électoral comporte plusieurs sources de suradditivité. Tout d'abord, celle résultant de la formule d'Hondt.

[64] Nous ignorons ici la question des sections départementales et les obligations qui en découlent.

[65] Le lecteur excusera nos raccourcis. Voter blanc est un vote valide mais comme seuls les votes exprimés comptent dans la règle finale, ils sont ici compatibilisés avec l'abstention et les votes nuls.

[66] Ces chiffres diffèrent pour quelques régions comme par exemple la Corse.

Ensuite, celle qui découle des seuils planchers. Enfin, celle impliquée par l'octroi du bonus au vainqueur.

Il y a par ailleurs plusieurs spécificités qu'il convient de souligner. Les partis peuvent procéder à une alliance pré-électorale sous la forme d'une liste unique. Ils peuvent aussi attendre et réaliser à la fin du premier tour une alliance intérim-électorale. Cette seconde option comporte plusieurs risques pour les (petits) partis. Le premier est de ne pas être en position d'y participer faute d'atteindre le premier seuil. Le second est d'être dans des conditions de marchandage bien moins avantageuses que celles prévalant avant l'élection. Le parti qui est en-deçà du second seuil se trouve en effet dans une position d'attente qui peut être plus moins fragile en fonction des conditions d'accès au bonus de son partenaire. On voit ici se dessiner les principaux paramètres qui vont impacter le marchandage des partis contemplant une alliance : les scores des partenaires (un parti en-deçà de 10% n'est pas dans la même position qu'un parti au-delà de 10%), la distance entre le meilleur score des partis de l'alliance et le meilleur score des partis hors alliance. Deux autres spécificités viennent s'ajouter à la liste ci-dessus.

Tout d'abord, contrairement à la loi des apparentements, les partis s'engageant dans une alliance peuvent négocier le nombre de sièges espérés (espérés, car ils négocient en situation d'incertitude) allant à chacun. Chose qu'ils ne pouvaient pas faire dans le cas de la loi de 1951. Rien n'interdisait au législateur français en 2003 de faire de même : un ou plusieurs partis ayant un score de premier tour entre 5% et 10% pourraient être invités par un ou plusieurs partis ayant un score supérieur à 10% à former un apparentement qui aurait servi de base au calcul des sièges alloués à la proportionnelle et au bonus. Comme pour la loi de 1951, l'apparentement en tête se serait vu attribuer le bonus et le calcul des sièges résiduels se ferait dans un premier temps à l'échelle des apparentements. Ensuite, au sein de chaque apparentement, une seconde application de la méthode d'Hondt aurait distribué les sièges échus entre les membres de l'apparentement. Ici réside une différence majeure entre les apparentements et le mécanisme retenu par le législateur. *Ici le jeu coopératif est un jeu TU alors que dans le cas des apparentements il s'agissait d'un jeu NTU.*

Ensuite s'agissant du comportement des électeurs et des contrefactuelles sur la base desquelles les calculs des négociateurs sont basés, il est important de rappeler qu'au stade intérim, on dispose des votes des électeurs au premier tour. Donc ici, ce que les négociateurs doivent évaluer concerne les transitions entre les deux tours pour toutes les configurations d'alliance concevables. Notons que ceci peut affecter l'acuité ou la précision des prédictions, mais cela ne change pas fondamentalement la nature du marchandage : les acteurs doivent prédire toutes les contrefactuelles. A titre d'illustration, considérons le cas d'une situation où 3 partis (les partis 1, 2 et 3) peuvent participer au second avec ou sans alliance et que 2 autres partis (les partis 4 et 5) ont besoin d'un allié pour le faire: il y a donc 5 joueurs au total. Supposons aussi que le graphe d'alliances soit tel que les partis 1 et 2 sont isolés et que les partis 3, 4 et 5 sont connectés deux à deux : le jeu d'alliance ne concerne donc que les 3 derniers partis. Si le parti 3 fait alliance avec les partis 4 et 5 (donc une grande alliance), ils doivent estimer le nombre de voix que totalisera l'alliance ainsi que les voix qui iront à leurs concurrents et à l'abstention. Cela est décrit par une matrice de format $(n+1) \times 4$, dite *matrice de transfert*, où n_{ij} désigne le nombre d'électeurs qui ont choisi i

au premier tour et j au second avec $i = 0, 1, ..., n$ et $j = 0, 1, 2$, alliance (où 0 correspond à l'abstention). Si en revanche, aucune alliance n'est formée la matrice est toujours de format $(n+1) \times 4$ mais le dernier choix désigne le parti 3. En balayant l'ensemble des possibilités, on nécessite 4 matrices de transfert. Si le score du parti 4 ou celui du parti 5 dépasse 10%, le nombre nécessaire de matrices passe de 4 à 5. Et si le score du parti 4 et celui du parti 5 dépasse 10%, le nombre de matrices est toujours égal à 5. On anticipe que la combinatoire du problème se complique singulièrement lorsque les configurations d'alliances se multiplient. Rappelons que dans le cas de la loi de 1951, sur la base de leurs graphe impliquant 6 partis, Lee, McKelvey et Rosenthal arrivaient à 20 structures.

Hypothèses sur les contrefactuelles. Pour comprendre la construction de la fonction caractéristique et les implications des solutions de marchandage dans le cadre de ce jeu, nous allons reprendre le modèle général de Le Breton et Van der Straeten (2013) dans le contexte d'une version simplifiée des élections régionales de 2010.

On dénombrait 6 acteurs majeurs : FG, EELV, PS, MODEM, UMP et FN. Le graphe décrivant les structures d'alliances concevables est supposé être du type de celui discuté plus haut : graphe complet à gauche, graphe vide à droite. On aura donc fondamentalement soit un jeu à trois joueurs: FG, EELV, PS soit un jeu à deux joueurs: FG,PS ou EELV, PS.

S'agissant des matrices de transfert pour toutes les contrefactuelles, Le Breton et Van der Straeten font les hypothèses suivantes : un électeur qui s'est abstenu au premier tour continue de s'abstenir au second, un électeur qui a voté pour un parti qui n'est plus présent au second tour (seul ou alllié) s'abstient, un électeur dont le parti du premier tour est toujours présent (seul ou allié) vote pour lui ou l'alliance dans laquelle il se trouve. Les deux premières hypothèses ne sont pas complètement défendables sur le plan empirique[67] mais elles ne sont pas complètement irréalistes pour autant. Notons cependant que la construction qui va suivre peut etre généralisée à toute famille de matrices de transfert sans aucune difficulté conceptuelle. La troisième en revanche semble aller de soi en dehors de toute considération de vote stratégique. Il est vrai que des électeurs d'un parti peuvent ne pas apprécier de voir leur parti s'associer à des partenaires qu'ils aiment moins ou pas du tout et décider par exemple de s'abstenir. Si la fraction d'électeurs ayant ce type de comportement était significative alors la suradditivité du jeu ne serait plus garantie et les gains à la coopération pourraient s'évaporer. Peut-on faire autrement ? On aurait pu procéder comme Lee, McKelvey et Rosenthal qui font d'une part l'hypothèse héroïque d'anticipations parfaites et d'autre part l'hypothèse d'invariance du comportement des électeurs aux alliances formées. On pourrait aussi comme eux supposer que les protagonistes anticipent parfaitement les résultats du second tour dans le cas de l'alliance effectivement observée (en anticipant par exemple des taux de report des électeurs du premier tour non représentés au second et des taux de mobilisation des abstentionnistes du premier tour) et inférent les résultats pour toutes les contrefactuelles.

Pour construire le jeu coopératif à utilité transférable à 3 joueurs PS (joueur1), EELV (joueur 2) et FG (joueur 3) (ou deux si seulement FG ou EELV passe la barre des 5%),

[67] Les partis disposent de plus ou moins grandes réserves de voix (certains partisans se "réveillent" au second tour); certains électeurs déçus de ne pas voir leur parti préféré présent reportent leur vote sur un autre parti qu'ils jugent proche de leurs préférences.

Le Breton et Van der Straeten font plusieurs autres hypothèses supplémentaires. D'une part, ils ignorent l'incertitude concernant les voix de second tour (comme d'ailleurs tous les auteurs ayant abordé cette question). D'autre part, ils ignorent le caractère entier de la variable siège et supposent celle-ci continue. Il s'agit clairement d'une approximation[68]. Est-elle acceptable ? Elle l'est d'une certaine ne manière si le nombre K de conseillers régionaux est suffisamment grand et dans le cas de ces circonscriptions, ce nombre est élevé: autour de 50 pour les plus petits conseils, souvent autour de 100 et montant jusqu'à 209 pour l'Ile de France. Dans le cas de la loi des apparentements, cette approximation aurait été plus discutable car pour certains départements K était petit, par exemple égal à 5 ou 6. La suradditivité du jeu aurait été renforcée si nous avions conservé le caractère entier de la variable car la méthode d'Hondt est suradditive mais en revanche la définition des principaux concept utilisés (coeur, valeur de Shapley, nucléole) est tout simplement, à notre connaissance, inexistante[69].

Nous noterons N_i le nombre de voix reçues au premier tour par le parti i pour $i = 1, 2, 3, 4$ (UMP) et 5 (FN), N_0 le nombre d'abstentionnistes (y compris votes blancs et nuls) et N_- le nombre d'électeurs ayant voté pour un parti autre que ceux dont le numéro va de 1 à 5 (partis supposés non présents au second tour[70]. Le score V_i de premier tour du parti i (pourcentage des suffrages exprimé reçu par le parti i) est donc :

$$\frac{N_i}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_-}$$

Nous supposons que V_1 et V_4 sont supérieurs à 10% (ce qui est le can dans toutes les régions). Aucune hypothèse particulière n'est faite sur V_5 : dans certaines régions $V_5 < 10\%$. En 2010, dans toutes les régions $V_5 < V_4$; inégalité cessant d'être vraie dans certaines régions en 2015. Si V_2 et V_3 sont inférieurs à 5%, le jeu disparait. Nous supposerons donc qu'au moins l'un des deux scores est supérieur à 5%, ce qui fut toujours le cas en 2010. La combinatoire des situations possibles est alors la suivante[71]:

Jeux d'alliance à 2 joueurs $(V_3 < 5\%)$
Cas 1: $V_2 \geq 10\%$ et $V_1 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 2 : $V_2 \geq 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 3 : $V_2 \geq 10\%$, $V_1 + V_2 < Max\,(V_4, V_5)$
Cas 4 : $V_2 < 10\%$ et $V_1 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 5 : $V_2 < 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 6 : $V_2 < 10\%$, $V_1 + V_2 < Max\,(V_4, V_5)$
Jeux d'alliance à 3 joueurs $(V_2 \geq V_3 \geq 5\%)$

[68]Une autre manière de justifier la variable continue consisterait à permettre les randomisations jointes entiers sur les vecteurs entiers de sièges décrivant les répartitions possibles du total de sièges c'est à dire on tire au sort entre les différents vecteurs à coordonnées entières. On convexifierait ainsi l'ensemble non convexe de départ.

[69]En fait le respect de l'intégralité des variables fait passer d'un jeu TU à un jeu NTU: dès qu'il y a un trou intégral, on introduit une marche d'escalier.

[70]Nous négligeons ici le MODEM qui est présent au second tour uniquement dans la région Aquitaine.

[71]Sans perte de généralité, on suppose ici que le joueur 2 est plus fort que je joueur 3.

Lorsque $V_2 + V_3 < V_1$:
Cas 7 : $V_3 \geq 10\%$ et $V_1 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 8 : $V_3 \geq 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 9 : $V_3 \geq 10\%$, $V_1 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 10 : $V_3 \geq 10\%$, $V_1 + V_2 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 11 : $V_3 \geq 10\%$, $V_1 + V_2 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$
Cas 12 : $V_3 < 10\%$, $V_2 \geq 10\%$, $V_1 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 13 : $V_3 < 10\%$, $V_2 \geq 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 14 : $V_3 < 10\%$, $V_2 \geq 10\%$, $V_1 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 15 : $V_3 < 10\%$, $V_2 \geq 10\%$, $V_1 + V_2 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 16 : $V_3 < 10\%$, $V_1 + V_2 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$
Cas 17 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_1 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 18 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 19 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_1 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 20 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_1 + V_2 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_2 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 21 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_1 + V_2 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$
Lorsque $V_2 + V_3 > V_1$:
Cas 22 : $V_3 \geq 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_2 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 23 : $V_3 \geq 10\%$, $V_2 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 24 : $V_3 < 10\%$, $V_2 \geq 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_2 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 25 : $V_3 < 10\%$, $V_2 \geq 10\%$, $V_2 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 26 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_1 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_2 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$
Cas 27 : $V_3 < 10\%$, $V_2 < 10\%$, $V_2 + V_3 < Max\,(V_4, V_5)$ et $V_1 + V_3 > Max\,(V_4, V_5)$

Il y a donc 27 configurations possibles : 6 configurations à deux joueurs et 21 configurations à 3 joueurs. Comment mesurer les rapports de force entre les joueurs attachés à ces 27 configurations au travers de la fonction caractéristique d'un jeu TU ? Par exemple, dans le cas 12, le joueur 2 n'est clairement pas dans la même position de marchandage vis à vis du joueur 1 que dans le cas 14: dans le cas 14, sans la coopération avec le joueur 2, le bonus va à la droite. Comment la fonction caractéristique V reflète t-elle ces nuances ?

Puisque la fonction caractéristique va gommer les détails de la fonction de partition en introduisant la notion de garantie, les 19 cas de figure dans le cas de 3 joueurs vont parfois se trouver amalgamés s'agissant du bonus. Si on regarde le problème du point de vue du joueur 1 alors, soit le joueur 1 peut se garantir le bonus seul $(7, 12, 17)$ c'est à dire $V_1 > Max\,(V_2 + V_3, V_4, V_5)$, soit il ne le peut pas et les joueurs 2 et 3 en s'alliant le peuvent $(22, 24, 26)$, soit les joueurs 2 et 3 ne le peuvent pas mais les joueurs 1 et 3 le peuvent $(8, 13 + 23, 18 + 27)$, soit les joueurs 1 et 3 ne le peuvent pas mais les joueurs 1 et 2 le peuvent $(9, 14, 19)$, soit les joueurs 1 et 2 ne le peuvent pas mais les joueurs 1, 2 et 3, tous alliés, le peuvent $(10, 15, 20)$, soit aucune alliance ne le peut $(11, 16, 21)$. Le cas 26 est éliminé puisque lorsque $V_2 < 10\%$ et $V_3 < 10\%$, 1 et 3 peuvent pas participer au second tour sans 1 et donc ne peuvent pas se garantir la prime même si $V_2 + V_3 > Max\,(V_1, V_4, V_5)$. Le nombre de configurations est désormais réduit à 23. Les données de 2010 , hélas pour l'analyse empirique, ne couvrent pas la totalité des 23 configurations (en 2010, rappelons qu'il y avait 22 régions en métropole et 4 régions outre-mer!).

Nous renvoyons le lecteur à Le Breton et Van der Straeten pour une analyse détaillée et complète *de tous ces cas.*

Construction de la fonction caractéristique dans un exemple (Cas 13). Pour expliquer la construction de la fonction caractéristique du jeu, nous allons nous concentrer sur le cas 13. On notera N_+ le total $N_1+N_2+N_3+N_4+N_5$ si $N_5 \geq 10\%$ et $N_1+N_2+N_3+N_4$ si $N_5 < 10\%$. En termes d'alliances il y a 5 partitions possibles :

A. Aucune alliance

B. 1 reste seul et 2 et 3 s'allient

C. 2 reste seul et 1 et 3 s'allient

D. 3 reste seul et 1 et 2 s'allient

E. Les 3 s'allient

Considérons la partition A. Dans ce cas les nombres de voix recueillies par les partis 1, 2 (3 est éliminé) valent respectivement[72]:

$$N_1' = N_1 \text{ et } N_2' = N_2$$

et les sièges obtenus (en pourcentages du total) sont alors :

$$S_1 = \frac{3}{4}\frac{N_1}{N_+ - N_3} \text{ et } S_2 = \frac{3}{4}\frac{N_2}{N_+ - N_3}$$

car ici le bonus échappe au PS. En revanche, en ayant conduit à l'élimination du parti 3, ces stratégies individualistes ont contribué à une amélioration s'agissant de la composante proportionnelle.

Dans le cas de la partition B, les nombres de voix recueillies par le parti 1 et l'alliance 2 et 3 valent respectivement:

$$N_1' = N_1 \text{ et } N_{23}' = N_2 + N_3$$

et les sièges obtenus (en pourcentages du total) sont alors :

$$S_1 = \frac{3}{4}\frac{N_1}{N_+} \text{et } S_{23} = \frac{3}{4}\frac{N_2 + N_3}{N_+}$$

car ici à nouveau le bonus échappe à 1 et à l'alliance 2+3.

Dans le cas de la partition C, les nombres de voix recueillies par l'alliance 1 et 3 et le parti 2 valent respectivement:

$$N_{13}' = N_1 + N_3 \text{ et } N_2' = N_2$$

[72]D'après nos hypothèses, notons que pour tous les cas de figure, $N_4' = N_4$ et $N_5' = N_5$ si le parti 5 est présent au second tour.

et les sièges obtenus (en pourcentages du total) sont alors :

$$S_{13} = \frac{3}{4}\frac{N_1 + N_3}{N_+} + \frac{1}{4} \text{ et } S_2 = \frac{3}{4}\frac{N_2}{N_+}$$

Dans le cas de la partition D, le nombre de voix recueillies par l'alliance 1 et 2 (le parti 3 est éliminé) vaut :

$$N'_{12} = N_1 + N_2$$

et les sièges obtenus (en pourcentages du total) sont alors :

$$S_{12} = \frac{3}{4}\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3} + \frac{1}{4}$$

Dans le cas de la partition E, le nombre de voix recueillies par l'alliance 1, 2 et 3 vaut :

$$N'_{123} = N_1 + N_2 + N_3$$

et les sièges obtenus (en pourcentages du total) sont alors:

$$S_{123} = \frac{3}{4}\frac{N_1 + N_2 + N_3}{N_+} + \frac{1}{4}$$

On a donc terminé, ce faisant, un travail comparable à celui réalisé par Lee, McKelvey et Rosenthal : ils avaient 20 structures de partition à envisager et ici nous n'en avons que 5. Expliquons maintenant comment passer ici[73] de la fonction de partition à la fonction caractéristique V. Ici le parti 1 et l'alliance des partis 2 et 3 ne peuvent se garantir le bonus. Mais si le parti s'allie avec 2 ou 3 (et à fortiori avec les deux) l'alliance se garantit le bonus car le parti isolé ne peut rien faire. Mais que peut se garantir une alliance ou un parti isolé du point de vue de la composante proportionnelle ? Si par exemple le parti 1 fait cavalier seul, soit les deux autres partis s'allient, soit ils ne le font pas. Les deux cas n'ont pas les mêmes conséquences pour 1. Dans les deux cas, certes il perd le bonus, mais le cas où 2 et 3 s'allient lui est plus défavorable sur le plan de la composante proportionnelle : comme dans la loi des apparentements, les apparentements concurrents exercent une externalité négative sur l'apparentement considéré . Dans la définition de la fonction caractéristique du joueur 1, c'est donc ce cas défavorable qui est retenu. (Dans l'appendice 3, nous considérons une hypothèse alternative, en raisonnant en termes de fonction de partition.) Donc ici:

$$V(1) = \frac{3}{4}\frac{N_1}{N_+}$$

De même :

$$V(2) = \frac{3}{4}\frac{N_2}{N_+}$$

[73] Dans l'appendice 3, nous présentons quelques éléments d'analyse de notre problème en termes de fonction de partition.

En revanche :

$$V(3) = 0$$

car le parti 3 ne peut rien se garantir seul. Par contre, les alliances de 2 partis n'ont pas à se soucier de ce que fait le parti hors alliance. Par conséquent, d'après les calculs ci-dessus, on obtient:

$$\begin{aligned} V(12) &= \frac{3}{4}\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3}+\frac{1}{4} \\ V(13) &= \frac{3}{4}\frac{N_1+N_3}{N_+}+\frac{1}{4} \\ V(23) &= \frac{3}{4}\frac{N_2+N_3}{N_+} \end{aligned}$$

Et enfin :

$$V(123) = \frac{3}{4}\frac{N_1+N_2+N_3}{N_+}+\frac{1}{4}$$

Comment le partage des sièges dans une alliance qui se forme va-t-il être implémenté en pratique ? Pour illustrer ce point, considérons par exemple la coalition des partis 1 et 3 et supposons pour matérialiser le calcul que $\frac{N_1}{N_+} = 32\%$ et $\frac{N_3}{N_+} = 8\%$ et $K = 200$. Sous nos hypothèses , la coalition $\{1,3\}$ pense se garantir 110 sièges. Pour implémenter un partage, comme par exemple le partage $(88,22)$, elle peut décider d'occuper les 110 premières places de la liste jointe par 88 noms du parti 1 et 22 noms du parti 2. L'ordre est sans importance car il n'y a pas d'incertitude ici. Si on veut néanmoins respecter la clef de partage $\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$ adoptée ici du mieux possible quel que soit le nombre de sièges que la liste jointe gagnera effectivement, on s'efforcera de composer la liste jointe comme une fonction en escalier la plus proche possible de cettte proportion.

Cette ingénieuse visualisation de l'accord est due à Dunz (2011), qui appelle *fonctions d'allocation des sièges*[74] les partages associés à chaque score de l'alliance , et les a calculées pour toutes les régions dans l'intervalle correspondant à 80% du total des sièges. Dans les deux figures ci-dessous qui lui sont empruntées, on a reproduit ces fonctions dans le cas des listes jointes de la Haute-Normandie et de l'Ile-de-France. Pour ces deux régions, les partis 1, 2 et 3 ont fait une alliance à 3 et "Other" sur l'axe des abcisses désigne le total des partis 2 et 3. Pour lire la liste on part de 0; lorsqu'on se déplace horizontalement, on ajoute des noms des partis 2 ou 3 et lorsqu'on se déplace verticalement, on ajoute des noms du parti 1. Par exemple, pour la Normandie où il y a 59 sièges à pourvoir, les trois premiers noms sont du parti 1, le quatrième du parti 2 ou du parti 3, le cinquième du parti 1, le sixième du parti 2 ou du parti 3, les 6 places suivantes sont occupées par le parti 1, etc... Si l'alliance ne gagnait que 12 sièges, le parti 1 en obtiendrait 10, c'est-à-dire 83.33% du total. Avec 20 sièges, le parti 1 en obtient 15, c'est-à-dire 75% du total. A l'autre extrême, avec 44 sièges, le parti 1 en gagne 31, c'est-à-dire 70.45% du total. On a ici une relation non linéaire. En Haute-Normandie, le score de premier tour du parti 1 est $V_1 = 35\%$ et le score cumulé des partis 2

[74] C'est notre traduction pour "seat allocation function".

et 3 est $V_2 + V_3 = 17.5\%$, soit la moitié de celui du parti 1. In fine, l'alliance de gauche s'est partagée 37 sièges comme suit : 25 au parti 1 et 12 aux partis 2 et 3 (à hauteur de 6 chacun) donc 67.5 7% du total. Le scénario le plus favorable aux partis 2 et 3 correspond à 27 sièges car la part du parti 1 tombe à $\frac{2}{3}$ mais ce scénario est mathématiquement impossible ! Nous reviendons plus tard dans le texte sur ce cas intéressant de la Haute-Normandie, quand nous étudierons les prédictions du nucléole. Dans le cas de l'Ile-de France, la fonction d'allocation des sièges est proche d'une fonction continue. La gauche s'est partagée 141 sièges : les partis 1, 2 et 3 en a obtenu respectivement 70, 51 et 20.

Insérer fonction d'allocation des sièges de Haute-Normandie 2010 de Dunz ici

Insérer fonction d'allocation des sièges d'Ile-De-France 2010 de Dunz ici

Calcul de quelques solutions de marchandage dans un exemple (Cas 13). Dans le cas 13, dont nous avons déterminé la fonction caractéristique V ci-dessus, qu'obtient-on des solutions de marchandage[75] ? Nous allons déterminer ce que les partis obtiennent avec la valeur de Shapley et avec le nucléole. Les parts de sièges résultant de la valeur de Shapley sont décrites par le vecteur suivant :

$$\begin{aligned}
Sh_1(V) &= \frac{3}{4}\left[\frac{N_1}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right]\right] + \frac{4}{24} \\
Sh_2(V) &= \frac{3}{4}\left[\frac{N_2}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right]\right] + \frac{1}{24} \\
Sh_3(V) &= \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}\frac{N_3}{N_+} - \frac{1}{3}\frac{N_3}{N_+}\left[\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right]\right] + \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

alors que les parts des siéges résultant du nucléole sont décrites par le vecteur suivant :

$$\begin{aligned}
Nu_1(V) &= \frac{3}{4}\left[\frac{N_1}{N_+} + \frac{1}{3}\frac{N_3}{N_+}\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right] + \frac{1}{4} \\
Nu_2(V) &= \frac{3}{4}\left[\frac{N_2}{N_+} + \frac{1}{3}\frac{N_3}{N_+}\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right] \\
Nu_3(V) &= \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}\frac{N_3}{N_+} - \frac{2}{3}\frac{N_3}{N_+}\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right]
\end{aligned}$$

Le cas 13 est intéressant car on peut analyser les deux composantes du jeu (la composante "proportionnelle" et la composante "bonus") séparément, et additionner les prédictions obtenues dans les deux composantes[76]. On constate des différences entre les deux solutions. La valeur de Shapley donne plus au joueur 2 dans les deux composantes par rapport

[75]Dans ce qui suit, nous supposons que la plus grande alliance possible se forme. La question de la formation des alliances, qui était une des questions au coeur de l'analyse des alliances gouvernementales, est donc ici laissée de côté. Cette question est néanmoins importante car le jeu n'est pas toujours strictement suradditif.

[76]Rappelons que ce n'est pas toujours possible pour le nucléole alors que cela l'est toujours pour la valeur de Shapley.

au nucléole. Dans la composante bonus, les joueurs 2 et 3 reçoivent chacun $\frac{1}{6}$ du total qui vaut ici $\frac{1}{4}$ alors que le nucléole ne leur donne rien. Ici, le nucléole est beaucoup plus intuitif comme prédiction de marchandage[77]. En effet, le parti 1 peut organiser une concurrence à la Bertrand entre les partis 2 et 3 pour faire descendre leur prix à 0. Dans la composante proportionnelle, en notant aussi que :

$$\frac{1}{6}\left[1+\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3}\right] \geq \frac{1}{6}\frac{2\left(N_1+N_2\right)+N_4}{N_+-N_3} > \frac{1}{3}\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3}$$

on déduit que les joueurs 1 et 2 sont mieux traités avec la valeur de Shapley qu'avec le nucléole. Donc, dans les deux composantes, le joueur 2 reçoit un meilleur traitement avec Shapley alors que pour les joueurs 1 et 3 le traitement différentiel varie suivant la composante.

Retenons pour le moment le nucléole comme prédiction de marchandage. Qu'en déduit-on quant au pouvoir de marchandage du joueur 2 qui, rappelons-le, est ici dans uns position hybride : le parti 1 peut se contenter du joueur 3 pour le bonus mais le joueur 2 peut permettre au joueur 3 d'accéder au second tour ? Nous venons de voir que du point de vue du bonus, il n'a rien à attendre. Du point de vue de la composante proportionnelle, il reçoit un extra par rapport à sa valeur de réservation. Lorsqu'il coopère bilatéralement (c'est-à-dire en ignorant complètement la présence du joueur 1) avec le joueur 3, il a à se partager avec celui-ci un score en voix de second tour incrémental égal à:

$$\frac{3}{4}\left[\frac{N_2+N_3}{N_+}-\frac{N_2}{N_+}\right]=\frac{3N_3}{4N_+}$$

Le nucléole lui alloue la fraction $\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3}\right]$ de cet incrément: plus N_2 est grand, plus cette fraction est grande.

Que se serait-il passé si le joueur 1 avait été exclu du jeu d'alliance, c'est-à-dire si le jeu avait été un jeu à deux joueurs (les partis 2 et 3) ?. La fonction caractéristique de ce jeu $\widehat{V}$ aurait été :

$$\begin{aligned}
\widehat{V}(2) &= \frac{3}{4}\frac{N_2}{N_+-N_3} \\
\widehat{V}(3) &= 0 \\
\widehat{V}(23) &= \frac{3}{4}\frac{N_2+N_3}{N_+}
\end{aligned}$$

Le gain incrémental de la coopération est cette fois :

$$\frac{3}{4}\left[\frac{N_2+N_3}{N_+}-\frac{N_2}{N_+-N_3}\right]=\frac{3}{4}\left[\frac{N_3}{N_+}-\frac{N_3}{N_+}\frac{N_2}{N_+-N_3}\right]=\frac{3}{4}\frac{N_3}{N_+}\left(1-\frac{N_2}{N_+-N_3}\right)$$

[77] Dans notre article de 2013, nous aurions pu alternativement calculer l'ensemble de marchandage. Le nucléole en fait partie. Comme nous le rappelons dans l'appendice 1, soit le coeur est vide, auquel cas, l'ensemble de marchandage coïncide avec le nucléole, soit il est non vide et dans ce cas il coïncide avec le coeur. Il serait donc intéressant de calculer le coeur des jeux que nous venons de construire afin de définir une version multivoque de l'hypothèse de marchandage. Dans le cas 13, le coeur est vide et donc le nucléole est le seul vecteur dans l'ensemble de marchandage: la valeur de Shapley n'en fait pas partie.

qui est inférieur à $\frac{N_3}{N_+}$. En appliquant le nucléole à cette échelle, on obtient :

$$\begin{aligned} Nu_2\left(\widehat{V}\right) &= \frac{3}{4}\left[\frac{N_2}{N_+}+\frac{1}{2}\frac{N_3}{N_+}\left(1-\frac{N_2}{N_+-N_3}\right)\right] \\ Nu_3\left(\widehat{V}\right) &= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{N_3}{N_+}\left(1-\frac{N_2}{N_+-N_3}\right)\right] \end{aligned}$$

Nous avons vu au-dessus que :

$$Nu_2\left(V\right)=\frac{3}{4}\left[\frac{N_2}{N_+}+\frac{1}{3}\frac{N_3}{N}\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3}\right]$$

En général, $Nu_2\left(\widehat{V}\right)\neq Nu_2\left(V\right)$ et on vérifie que $Nu_2\left(\widehat{V}\right)>Nu_2\left(V\right)$ ssi :

$$\frac{1}{2}\left(N_+-N_2-N_3\right)>\frac{1}{3}\left(N_1+N_2\right)$$

Dans le cas où le FN n'est pas présent au second tour, on vérifie que ceci s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(N_1+N_4\right)>\frac{1}{3}\left(N_1+N_2\right)\Leftrightarrow N_1+3N_4>2N_2$$

inégalité qui est toujours vérifiée puique par hypothèse $N_4>N_1>N_2$: le cadre de marchandage bilatéral est plus favorable au parti 2 que son équivalent trilatéral.

En sus de cette observation importante, ce calcul a aussi le mérite d'illustrer le marchandage dans le cas bilatéral pur qui dans notre classification générale couvre les cas allant de 1 à 6. Il montre que dans le cas bilatéral pur où l'un des partis a besoin de l'autre pour rester dans la course, le parti le plus fort (ici le parti 2) reçoit plus que son score de premier tour convenablenent normalisé (car, on est passé de N_++N_- à N_+).

L'hypothèse de Gamson. Une heuristique simple que nous appellerons *solution de Gamson* car l'analogie avec la norme proportionnelle largement discutée dans notre analyse des coalitions gouvernementales est transparente consisterait à utiliser les comme proportions pour le partages des scores de premier tour (qui sont proportionnales à $\frac{N_i}{N_+}$ pour $i=1,2,3$) : *chaque parti dans une alliance à 3 joueurs ou à 2 joueurs recoit une part du total des sièges au prorata de son score de premier tour. On peut voir cette solution comme relevant d'un principe normatif de proportionalité ou comme ce qui se serait passé si le législateur avait retenu en lieu et place de la procédure choisie, le mécanisme d'apparentement de 1951.*

Ici, dans le cas 13, on voit qu'il n'en est rien à l'échelle des trois joueurs et qu'il n'en est rien non plus à l'échelle de deux joueurs. Ce que ces formules nous apprennent sur le plan qualitatif est que le parti 3 n'est pas en position de marchander sa part de Gamson $\frac{N_3}{N_+}$. Le nucléole comme solution de marchandage prédit qu'il reçoit moins. Sur le plan quantitatif cette fois, les formules donnent des indications sur les facteurs affectant la distorsion par rapport à Gamson. On commence par noter que le joueur 3 reçoit en fait moins de la moitié de sa part de Gamson dans le cas bilatéral et moins du tiers dans le cas trilatéral.

Hypothèse de marchandage vs. hypothèse de Gamson. Ce divorce entre Gamson et le Nucléole se retrouve dans les autres cas de figure également. La situation de la Normandie est décrite par le cas 17. Ce cas correspond à une position de force pour le parti 1 : il peut se garantir seul le bonus, tandis que ses deux partenaires ont besoin de lui pour se maintenir au second tour. Le Breton et Van Der Straeten (2013) montrent que dans ce cas :

$$Nu_1(V) = \frac{3}{4}\left[\frac{N_1}{N_+ - N_2 - N_3} + \frac{1}{2}\frac{N_+ - N_1 - N_2 - N_3}{N_+ - N_2 - N_3}\left(\frac{N_2}{N_+ - N_3} + \frac{N_3}{N_+ - N_2}\right)\right] + \frac{1}{4}$$

Dans le cas de la Haute-Normandie :

$$\begin{aligned}
\frac{N_1}{N_+ + N_-} &= 34.87\% \\
\frac{N_2}{N_+ + N_-} &= 9.12\% \\
\frac{N_3}{N_+ + N_-} &= 8.39\% \\
\frac{N_4}{N_+ + N_-} &= 25\% \\
\frac{N_5}{N + N_-} &= 11.79\%
\end{aligned}$$

En sommant les scores des partis 2 et 3, on obtient $9.12\% + 8.39\% = 17.51\%$. Gamson recommande donc un partage des sièges à hauteur de $\frac{2}{3}$ pour le parti 1 et de $\frac{1}{3}$ pour ses deux partenaires. On a vu que c'est effectivement le partage qui a été mis en oeuvre ex post (même si nous avons également vu aussi que la fonction d'alllocation des sièges s'écartait singulièrement de cette norme pour d'autres valeurs du total de sièges.) Que dit le nucléole ? Après calcul et division par le pourcentage de sièges de l'alliances, c'est à dire $\frac{3}{4}\left[\frac{N_1+N_2+N_3}{N_+}\right] + \frac{1}{4}$, on obtient que la part du parti 1 est égale à $97.5\,\%$! Le nucléole prédit une totale confiscation des gains de l'alliance par le parti 1. Ceci n'est pas étonnant, puisqu'il est dans la position idéale de marchandage dans les deux composantes. L'article de Le Breton et Van Der Straeten contient une conclusion du même type dans le cas de l'Aquitaine qui relève aussi du cas 17.

Ce modèle pose des jalons pour un test de l'hypothèse de marchandage contre l'hypothèse de Gamson.[78] Pour être tout à fait précis, nous avons ici en fait des combinaisons de plusieurs hypothèses. Pour Gamson, on peut dire qu'il s'agit d'une norme de proportionnalité

[78] L'idée que le marchandage peut conduire à un partage inégalitaire des gains n'est pas nouvelle. Duverger écrit déjà: "Institutions et programmes communs sont donc, en définitive, des moyens d'établir un certain rapport de force entre les partis coalisés. On serait tenté de distinguer à ce propos les alliances égalitaires et les alliances inégalitaires... *En fait toute alliance est inégalitaire et la seule question valable est son degré d'inégalité.* Trois éléments principaux entrent en ligne de compte pour définir le degré d'inégalité des alliés : leur dimension respective, leur position sur l'échiquier politique, enfin leur structure intérieure". Dans cet article seules les deux premières caractéristiques ont été prises en compte.

exogène mais cela ne dispense pas le modélisateur et l'expérimentateur de dire si cette norme s'applique à la totalité de la fonction d'allocation des sièges ou au résultat observé qui aurait été parfaitement anticipé (rappelons qu'au stade intérim, il reste de l'incertitude). Pour le marchandage, on a aussi couplé le marchandage à proprement parler avec une hypothèse forte sur la famille de matrices des transferts permettant d'anticiper les voix de second tour. Rejeter une hypothèse revient donc à rejeter un ensemble d'hypothèses.

Sans être exhaustifs, Le Breton et Van Der Straeten (2013) comparent les prédictions de Gamson et du Nucléole (et aussi de Shapley) pour un échantillon de régions. Leur analyse statistique n'est pas exécutée selon les canons en vigueur. Néanmoins, sur la base de leurs calculs numériques, le sens commun suggère fortement de rejeter l'hypothèse de marchandage au profit de Gamson. La conclusion provisoire de Le Breton et Van Der Straeten mérite cependant d'être revue et approfondie, car la lecture des données révèle un écart par rapport à Gamson.

Dunz (2011) s'est livré à un travail économétrique sur la base des élections régionales françaises de 2004 et de 2010. D le cas d'un régression[79] à la manière de Browne et Franklin (1973) dont le travail a été exposé dans la section 2 (sous-partie sur le partage des portefeuilles ministériels), il obtient :

$$Seat\% = -0.036 + 1.082 Vote\%$$

Il y a une différence notable avec Browne et Franklin. Ici le biais est en direction des grands partis, c'est-à-dire que les grands partis dans l'alliance tendent à recevoir une fraction des sièges supérieure à celle prédite par Gamson. Ceci est tout à fait en accord avec l'idée de marchandage ici. En effet, si on laisse le bonus de côté, les petits partis sont souvent en-deçà du seuil fatidique de 10% et donc dans une position de marchandage très faible. Pour le tester dans un contexte de régression, il introduit la variable dichotomique "$CanRun$" qui prend la valeur 1 ssi le parti fait un score de premier tour supérieur à 10% et obtient le résulat suivant avec un terme d'interaction.

$$Seat\% = 0.024 - 0.046 CanRun + 0.723 Vote\% + 0.341 CanRun * Vote\%,$$

Nous n'avons pas reporté les écarts type attachés aux différents coefficients : ils révèlent que le seul coefficient significatif est celui attaché à la variable $Vote\%$. Si l'on considère cependant la totalité de la regression, on obtient les deux droites suivantes correspondant respectivement aux valeurs 1 et 0 de la variable $CanRun$:

$$\begin{aligned} Seat\% &= -0.022 + 1.064 Vote\% \text{ (when } CanRun = 1) \\ Seat\% &= 0.024 + 0.723 Vote\% \text{ (when } CanRun = 0) \end{aligned}$$

De la seconde droite, on déduit que les partis qui font un score relatif dans la coalition supérieur à 8.7% font moins bien que prédit par Gamson, ce qui est le cas de toutes les observations de l'échantillon ayant cette caractéristique. Alors que de la première droite, on déduit que tous les partis qui font un score supérieur à 34.5% font mieux que prédit

[79] Les unités d'observation sont les partis susceptibles de participer à une alliance au second tour.

par Gamson. Et la seconde droite est toujours en-dessous de la première dans la partie raisonnable de l'intervalle de valeurs de la variable $Vote\%$.

Dunz continue son exploration en s'appuyant cette fois sur les fonctions d'allocation de sièges et propose plusieurs tests de l'existence d'une composante marchandage. En particulier, il conduit une régression du nombre de sièges du parti 1 contre le nombre de sièges alloués aux partis 2 et 3, c'est à dire $Seat\,(1) = a + b * Seat\,(2+3)$, pour approximer la vraie fonction d'allocation des sièges. Gamson correspond à : $a = 0$ et $b = \frac{N_1}{N_2+N_3}$. Dunz démontre qu'au seuil de 95%, cette hypothèse est rejetée dans 25 cas sur 38 ! La leçon de ces estimations est que la prévalence de Gamson ne saurait dissimuler une forme de marchandage.

Vers où aller pour complèter l'analyse ? Notons tout d'abord que notre spécification des "stakes" est sans doute à revoir. A juste titre, Dunz introduit une variable dichotomique pour distinguer les situations où l'alliance gagne le bonus de celles où il le perd. Dans le second cas, la ressource est plus rare et il serait naturel d'intuiter (même si nous avons supposé que les utilités sont linéaires et donc non strictement concaves) que le marchandage sera plus apre. En comparaison, dans le premier cas, on est sans doute plus enclin à céder et à appliquer une norme comme Gamson. Sauf qu'en cas de victoire, les nombeux postes prestigieux et rémunérateurs de l'executif régional tomberont dans l'escarcelle de l'alliance. Il faudrait donc revoir la définition de ce qu'une coalition peut se garantir pour en tenir compte. Par exemple, on pourrait songer à définir la valeur pour une coalition de r sièges ordinaires et t sièges associés à des positions dans l'exécutif égale par $t + \gamma r$, où $\gamma > 1$ est un coefficient de conversion. Dans ce cas, tous les tests ci-dessus doivent être revus car il faudrait regarder dans les données non seulement la répartition des sièges entre les partenaires de l'alliance mais aussi la répartition des postes de l'exécutif entre eux. L'hypothèse de marchandage[80]

[80] A l'attention de nos lecteurs ayant une vision angélique des moeurs en politique et qui douteraient dès le départ de l'opportunité de formuler l'hypothèse, nous insérons deux extraits de propos musclés et dépourvus d'ambiguïté quant aux motivation des élus. Les élus locaux défendent aprement, siège par siège, les positions respectives de leurs partis. Le 25 Mars 2010 (entre les deux tours) J.-L. Mélenchon écrit:

"(...) Restent deux échecs et non des moindres. La Picardie. Moche. Un truc vicieux et pervers pour piéger tout le monde avec des offres à la baisse d'heure en heure, dans le plus parfait style des films sur la mafia.. Genre : "*Ah vous en voulez cinq ? Bon ce sera deux.* Et ainsi de suite. A la fin c'est trop tard !... L'autre paire de drôles ce sont les faces de pierre de la sociale démocratie de la Haute Vienne. (...) Comme le score a été de très haut niveau, les châtelains socialistes s'en sont étranglés. Même morgue dans le sang que les roitelets picards. Comme on fait plus de 10%, l'honneur commande de ne pas céder. *En effet ceux-là voulaient premièrement nous donner moins de sièges que la proportionnelle, deuxièmement nous obliger à déménager sans raison nos candidats d'un département à l'autre, troisièmement nous obliger à retirer notre candidat NPA. Il est vrai que pour un parti qui comptait s'allier avec le Modem, se retrouver avec un candidat NPA, cela faisait beaucoup.*" ("Négociations d'entre deux tours : à propos de Picardie et Limousin" sur le site http://www.gauchemip.org).

Et voici ce qu'écrit dans le cadre des négociations d'entre deux-tours pour la région Nord-Pas De Calais, G. Brunel, premier secrétaire du PCF de l'Aisne : "Sur une hypothèse de 33 à 36 élus pour la région, si la liste de gauche l'emportait, les simulations garantissent au minimum 8 élus à EE qui a obtenu 57338 voix au premier tour. Les voix obtenues par le Front de Gauche au premier tour s'élèvent à 30719 donc au minimum 4 élus. On a appliqué la règle Aubry [*Note des auteurs : le partage de Gamson*] pour EE mais pas pour FG. Comment Gewerc peut-il justifier son refus de nous donner 4 places éligibles ? (...) *Les chiffres sont précis: nous étions légitimés par le vote des citoyens à demander 5 places en position éligible au plus fort reste et Gewerc a refusé 4 places que nous avions accceptées* (...)".

pourrait etre réhabilitée au détriment de Gamson.

On pourrait d'ailleurs tester aussi la *solution de Le Drian*[81] définie comme l'application de Gamson sur les sièges hors bonus et l'attribution du bonus (si bonus il y a) à la liste de l'alliance arrivée entre au premier tour.

Pour conclure, notons cependant qu'aucune analyse empirique de la question des alliances entre les deux tours ne saurait faire l'impasse sur un traitement soigné de la question des matrices de transfert. La question de l'estimation des matrices de transfert est un classique de la science politique empirique des scrutins à deux tours[82]. Dans sa version faible, il s'agit de savoir prédire les résultats du second tour sur la base de ceux du premier et dans sa version forte d'inférer les entrées de la matrice de transfert pour répondre à des questions du type: Vers qui sont allés les votes du parti x ou y au second tour ? Le livre de vulgarisation récent de Le Bras (2016), consacré au nouvel ordre électoral français, illustre à quel point cette thématique est centrale : une majeure partie de son livre, en particulier son chapitre 6 sur les duels, vise à inférer ce qu'a été cette matrice. Aux départementales de 2015, les duels de second tour ont été de trois types : (Gauche contre FN : 288 cantons), (Droite contre FN : 534 cantons) et (Droite contre Gauche : 668). Déterminer une matrice de transfert revient dans chacune de ses 3 configurations à évaluer ce qu'on fait les abstentionnistes du premier tour et et les électeurs des partis éliminés. Les voix (en millions d'électeurs) dans la cas des premiers duels sont reportées dans le tableau suivant :

	Gauche	Droite	FN
Premier Tour	1468	681	1037
Second Tour	1753		1252

Le Bras se livre alors à une petite arithmétique pour établir *la matrice de transfert moyenne* suivante :

	Abstentions	Gauche	FN
Abstentions	100%	0	0
Gauche	0	100%	0
Droite	26.5%	42%	31.5%
FN	0	0	100%

Elle n'est pas si éloignée que celà de la matrice du modèle de Le Breton et Van der Straeten, à l'exception de la ligne concernant les reports de la droite, puisque seulement 26.5% s'abstiennent. Il s'agit d'une moyenne et Le Bras montre que si cette matrice avait été la même dans les 288 cantons de ce type, le FN aurait totalisé 26 victoires au lieu des 19 observées. Il y a donc de la variance dans les matrices de transfert !

[81]Du nom de M. Le Drian, chef de file de la liste PS en région Bretagne en 2010, qui affirma dans le cadre des négociations d'entre deux tours avec EELV : "Neuf sièges pour EEB, c'est le résultat après l'attribution de la prime de 25% des sièges à la liste en tête, c'est-à-dire la nôtre. Non, il n'est pas question de partager la prime. Dans les courses cyclistes, le vainqueur d'étape partage la prime avec ses coéquipiers, pas avec les équipiers du second." (Propos rapportés dans la presse régionale). Un florilège des échanges entre les têtes de listes PS et EELV en région Bretagne est reproduit dans Le Breton et Van der Straeten (2013).

[82]En France en particulier, pour tester si le "Front Républicain" supposé faire rempart au FN a fonctionné ou non. Mais on retrouve aussi cette préoccupation en Italie (Forcina Ganldi et Bracalente (2012)).

Dans le cas des duels de type 2, le tableau des voix est comme suit :

	Gauche	Droite	FN
Premier Tour	1676	2371	2042
Second Tour		3738	2155

Le Bras obtient cette fois la matrice de transfert moyenne suivante :

	Abstentions	Droite	FN
Abstentions	100%	0	0
Gauche	32%	60%	8%
Droite	0	100%	0
FN	0	0	100%

Le Bras montre là aussi la présence d'une variance positive. Enfin, dans le cas des duels de type 3, on obtient le tableau des voix suivant :

	Gauche	Droite	FN
Premier Tour	2922	2498	1186
Second Tour	2840	3126	

On constate, qu'au total, la gauche a perdu des voix entre les deux tours. Cette fois, pour rendre compte directement de l'hétérogénéité, Le Bras suggère deux matrices de transfert suivant qui, de la droite ou de la gauche, a plus de chance de l'emporter au second tour. Dans le premier cas, il obtient approximativement :

	Abstentions	Gauche	Droite
Abstentions	100%	0	0
Gauche	0	100%	0
Droite	0	100%	0
FN	77%	0	23%

tandis que, dans le second cas, la matrice se présente approximativement comme suit :

	Abstentions	Gauche	Droite
Abstentions	100%	0	0
Gauche	20%	80%	0
Droite	0	100%	0
FN	$40-45\%$	0	$55-60\%$

Les voix perdues par la gauche sont largement concentrées sur ce type de configurations. Une partie des électeurs de gauche a déserté son camp lorsque la victoire de la gauche était acquise ou presque. D'après Le Bras, l'explication principale se trouve dans la division de la gauche qui se manifeste fortement dans ces circonstances[83].

[83]Notons cependant que les électeurs du FN se mobilisent davantage en cas de risque d'une victoire de la gauche.

Le Bras se sert ensuite de ses calculs dans son chapitre 7 intitulé "Refaire les Elections". Il le peut car avec de telles matrices, il peut examiner de nombreuses contrefactuelles. Naturellement, l'estimation rigoureuse de ces matrices de transfert soulève des questions difficiles d'inférence statistique pour éviter les pièges de l"ecological fallacy". Des méthodes existent et ont déjà été utilisées dans des contextes électoraux (Brown et Payne (1986), McCarthy et Ryan (1977) et Park (2008) pour n'en citer que quelques uns). Rappelons cependant que dans le cas du modèle de marchandage de Le Breton et Van der Straeten, cette difficulté est doublée d'une autre difficulté, à savoir la nécessité de pouvoir estimer une matrice de transfert pour chaque configuration d'alliances. Pour cela, il faudrait disposer de matrices comme celles présentées ci-dessus, mais plus détaillées en lignes et en colonnes. Cette avenue de recherche nous paraît prometteuse pour une analyse empirique poussée des alliances dans le cadre des élections régionales[84].

4 Compléments

L'objet de cette dernière section est d'aborder deux questions importantes qui ont été évoquées superficiellement dans les sections précédentes : les liens avec les approches en termes de jeux non-coopératifs d'une part et la validation empirique des théories de la formation des coalitions et du partage des gains de la coopération évoquée dans cet article d'autre part.

4.1 Approche Non-Coopérative

Nous avons plaidé la cause d'une approche en termes de jeux coopératifs. Dans cette section nous allons explorer brièvement les prédictions d'équilibre qui émergent d'un modèle non coopératif de marchandage introduit dans un contexte distributif par Baron et Ferejohn (1989) puis généralisé au cas spatial quelconque par Banks et Duggan (2000). Ce jeu appelé ci-dessous jeu BF décrit un processus d'offres et contre-offres sans limite a priori sur la longueur de la négotiation. Tant que la négociation n'est pas close, on tire au sort un négociateur parmi les joueurs. Ce négociateur fait une offre, c'est à dire choisit une alternative dans l'ensemble des alternatives X supposé être un sous-ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^{\geqslant}$. Si l'ensemble des joueurs se déclarant satisfaits de l'offre forme une coalition gagnante, alors la négociation s'arrête et l'alternative x est mise en oeuvre. Sinon, on tire au sort un autre négociateur qui fait à son tour une offre, etc[85].

Chaque joueur est ici décrit par sa fonction d'utilité $u_i : X \to \mathbb{R}_+$ et son taux d'actualisation $\delta_i \in [0, 1]$: plus δ_i est petit , plus le joueur i est impatient et donc enclin à voir la négociation se terminer rapidement. Le tirage au sort est supposé suivre un processus i.i.d. décrit par

[84] Le tripartisme qui semble s'installer en France va aussi changer la nature du problème, comme cela a déjà été évoqué à l'occasion des régionales de 2015. Tout dépendra des utilités des partis autres que le F.N. (sièges contre risque de voir le F.N. l'emporter) et du nombre de régions où cet arbitrage sera sur la table des principaux partis.

[85] En cas de désaccord perpétuel, le vecteur d'utilités $(0, 0, ..., 0)$ est mis en oeuvre. Ce vecteur décrit une option défaut Pareto dominée par toutes les autres alternatives.

un vecteur $p = (p_1, ..., p_n)$: p_i désigne la probabilité que le joueur i soit sélectionné pour faire l'offre. Les inputs de ce jeu sont ici le jeu simple $(N, \mathcal{W})$, le profil de fonctions d'utilité $u = (u_1, ..., u_n)$, le profil des taux d'actualisation $(\delta_1, ..., \delta_n)$ et le profil p des probabilités de sélection.

A toute étape t de la négociation, les stratégies pour les joueurs consistent en une offre pour celui qui fait la proposition et une réponse (parmi les deux réponses possibles) pour ceux qui votent sur l'offre. En principe, ces stratégies peuvent être conditionnelles à toute l'histoire de la négotiation jusqu'à la période t. Par stationnaire, on entend une stratégie qui ne dépend pas de l'histoire du jeu. Duggan et Banks (2000) ont démontré que ce jeu admet un équilibre stationnaire parfait en sous-jeux si les joueurs ne sont pas infiniment patients[86].

Le cas distributif décrit par le simplexe et l'hypothèse $u_i(x) = x_i$ pour tout $i \in N$ a fait l'objet d'une exploration très poussée de nombreux auteurs au premier rang desquels on peut citer Ansolabehere, Snyder, Strauss et Ting (2005), Eraslan (2002), Eraslan et McLennan (2013), Montero (2006, 2007, 2016), Snyder, Ansolabehere et Ting (2005). Suivant l'approche d'Eraslan et McLennan, nous appellerons *équilibre réduit* la donnée d'un vecteur de paiements espérés v et d'une matrice carrée[87] $y = (y_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où y_{ij} désigne la probabilité que j (lorsqu'il en situation de faire une proposition) inclut le joueur i dans son offre. Un équilibre réduit est une paire (v, y) telle que :

$$v_i = m_i(y)\delta_i v_i + p_i w_i(v, y_i)$$

où:

$$m_i(y) = \sum_{j=1}^{n} p_j y_{ij}$$

$$w_i(v, y_i) = 1 - \sum_{j=1}^{n} y_{ji}\delta_j v_j$$

$$y_i \in \underset{y'_i \in \mathcal{Y}_i}{ArgMin} \sum_{j=1}^{n} y'_{ji}\delta_j v_j$$

L'interprétation de ces équations est transparente. Un joueur en situation de répondre accepte une offre qui a une valeur égale ou supérieure à la valeur espérée escomptée d'un refus. Son espérance d'utilité dans ce jeu est dès lors décrite par le membre droit de la première formule. La dernière condition énonce simplement que la probabilité mixte du proposeur maximise efffectivement son surplus. Ici, on voit clairement que la randomisation porte sur les coalitions gagnantes ciblées par le proposeur qui cherche à acheter son support au plus bas prix.

[86]Ces équilibres sont sans délai : la première offre est acceptée. De plus si X et u satisfont des conditions très générales de régularité (elles sont en particulier satisfaites dans le cas où X est le simplexe et $u_i(x) = x_i$ pour tout $i \in N$) , le théorème s'étend au cas où les joueurs sont le cas échéant infiniment patients.

[87]Avec $y_{ii} = 1$ pour tout $i \in N$.

Eraslan et McLennan démontrent que tout équilibre stationnaire parfait en sous-jeux induit un équilibre réduit et que tout équilibre réduit est induit par au moins un equilibre stationnaire parfait en sous-jeux. Leur principal résultat énonce que l'ensemble des équilibres réduits est non vide et que tous les équilibres réduits ont la même première composante. Il s'agit donc d'un résultat très spectaculaire : tous les équilibres stationnaires parfaits en sous-jeux induisent le même vecteur d'utilités espérées[88]. Signalons enfin que, dans le cas où X n'est pas le simplexe, les résultats sont différents. En particulier, il existe des exemples de non unicité, même dans le cas unidimensionnel[89].

Nous allons maintenant examiner la relation entre cet équilibre unique dans le jeu BF et les solutions de la théorie des jeux coopératifs. Le travail le plus accompli a été réalisé par Montero (2005, 2006, 2016). Il convient cependant d'évoquer Ansolabehere, Snyder, Strauss et Ting (2005) et Snyder, Ansolabehere et Ting (2005) qui énoncent que si un jeu majoritaire pondéré est suffisamment répliqué[90], le vecteur d'équilibre du jeu BF est proportionnel aux poids des joueurs dans le cas où le vecteur p est proportionnel aux poids. Leurs travaux suggèrent donc que dans une situation où il y a un nombre fini de types de joueurs et un nombre important de joueurs de chaque type, l'équilibre du jeu BF coïncide avec la solution de Gamson.

Leur résultat ne fournit cependant aucune information sur la nature de la convergence et la qualité de l'approximation pour un ordre de réplication. Nous allons voir dans le reste de cette section que ce résultat n'est pas vrai en toute généralité, et qu'il peut parfois être souhaitable de remplacer la proportionalité aux poids de la solution de Gamson par des solutions de marchandage, comme par exemple le nucléole ou le nucléoli (défini ci-dessous).

Montero (2006) introduit un ensemble d'imputations qu'elle appelle le *nucléoli*[91]. Une imputation est dans le nucléoli du jeu simple $(N, \mathcal{W})$ ssi elle est solution du programme linéaire suivant[92] (l'appendice 2 contient un certain nombre de définitions et résultats sur les jeux simples qu'il est utile d'avoir à l'esprit pour la suite de cette analyse) :

$$\underset{x,\epsilon}{Min}\,\epsilon \text{ sous les contraintes } \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i \in N} x_i = 1 \\ \sum_{i \in S} x_i \geq 1 - \epsilon \text{ pour tout } S \in \mathcal{W} \\ x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in N \end{array} \right.$$

[88]Ce résultat est établi sous l'hypothèse que les facteurs d'escompte sont strictement inférieurs à 1. Lorsque certains facteurs d'escompte sont égaux à 1, l'équilibre est souvent unique dans l'espace des utilités mais le résultat cesse d'être vrai en toute généralité . On obtient cependant une prédiction unique en considérant la limite de l'équilibre lorsque les taux tendent vers 1.

[89]Nous renvoyons le lecteur à l'introduction d'Eralsan et McLennan qui offre un vaste tour d'horizon de la littérature abondante consacrée à ce sujet.

[90]La réplique d'ordre r (où r est un entier) du jeu majoritaire pondéré $[q; w_1, ..., w_n]$ est le jeu majoritaire pondéré $[rq; w_1, ..., w_1, ..., w_n, ..., w_n]$ (chacun des n joueurs initiaux a maintenant $r-1$ sosies; le nombre total de joueurs est nr).

[91]*Nucléoli* est notre traduction de *nucleus*. A ne pas confondre avec *nucleolus* que nous avons traduit par *nucléole*.

[92]Le Breton et Zaporozhets (2010) et Le Breton, Sudhölter et Zaporozhets (2012) étudient un programme linéaire équivalent (à un facteur d'échelle près) à celui-là.

On remarque que toute solution (x, ϵ) de ce problème vérifie $\epsilon \geq 0$; sinon la première contrainte serait violée. Le nucléoli est très voisin du moindre coeur introduit dans l'appendice 1. Montero établit un certain nombre résultats clarifiant les relations entre le nucléoli, le moindre coeur et le coeur.[93] Montero a aussi démontré que si $(N, \mathcal{W})$ est un jeu homogène de somme constante, alors le nucléoli coïncide avec le nucléole.

Le principal résultat démontré dans Montero (2006) énonce que si $\delta_i = \delta_j = \delta$ pour tout $i, j \in N$ et si p est dans le nucléoli d'un jeu simple supposé propre alors, si $\delta < 1$, le vecteur p est le vecteur des utilités espérées d'équilibre[94]. Par ailleurs, elle démontre également que si $\sum_{i \in S} p_i \geq \frac{1}{2}$ pour tout $S \in W$, alors si p est dans le nucleoli et si $\delta < 1$, le vecteur p est le vecteur des utilités espérées d'équilibre.

Ce beau résultat de Montero établit une connexion interessante entre les approches coopératives et non-coopératives : l'émergence du nucléole comme vecteur espéré de paiements lorsque le jeu est un jeu majoritaire pondéré homogène sans joueurs fantômes et que protocole est décrit par le vecteur p des poids de la représentation intégrale minimum homogène. On dit que le nucléole est *auto-confirmant*. Essayons de voir de facon plus générale quel type de coalition(s) prédit l'unique équilibre de ce jeu dans le cas où le jeu simple est un jeu majoritaire pondéré. Rappelons que dans la perspective du jeu réduit cela revient à déterminer le vecteur des paiements et aussi les probabilités pour chaque joueur de recevoir une offre. Le calcul des probabilités attachées à la randomisation de l'offre de chaque joueur lorsque ce joueur est en situation de proposeur est assez subtile. Voyons le au travers d'exemples.

Considérons le jeu $[5; 3, 2, 2, 1]$. Il y a 2 types de coalitions minimales. L'unique gros joueur s'associe à un joueur moyen ou un joueur moyen s'associe à l'autre joueur moyen et au petit joueur. On pourrait intuiter que l'équilibre $v = (a, b, b, c)$ du jeu vérifiéra $a = b + c$ pour garantir qu'un joueur moyen en situation de proposeur soit indifférent entre s'associer au joueur 1 ou à la coalition constituée de l'autre joueur moyen et du petit joueur. En revanche ici il n'y a aucune raison particulière d'espérer que $b = 2c$ car il n'y a qu'une

[93] Ainsi qu'il l'a été noté, le nucléoli est très voisin du moindre coeur. La seule différence tient au fait que dans le programme définissant le nucléoli apparaît la contrainte $\sum_{i \in N} x_i \geq 1 - \epsilon$. Si cette condition était éliminée nous aurions exactement le moindre coeur du jeu simple $(N, \mathcal{W})$. Si le jeu simple n'est pas propre (et donc si le jeu TU attaché n'est pas suradditif), alors la contrainte $\sum_{i \in N} x_i \geq 1 - \epsilon$ n'est jamais active et donc le nucléoli et le moindre coeur coïncident. Si le jeu simple est suradditif mais à un coeur vide alors il n'existe aucune solution (x, ϵ) telle que $\epsilon \leq 0$. Donc $\epsilon > 0$ et à nouveau la contrainte $\sum_{i \in N} x_i \geq 1 - \epsilon$ ne peut être active. Donc, dans le cas où le coeur est vide le nucléoli et le moindre coeur coïncident. Dans le cas où le coeur est non vide, le nucléoli coïncide avec le coeur puisqu'on ne peut pas faire mieux que $\epsilon = 0$. Par ailleurs, puisque le coeur est non vide il existe un ensemble non vide de joueurs noté $\mathcal{V}$ qui est contenu dans toutes les coalitions gagnantes (les joueurs qui disposent d'un pouvoir de veto). Puisque d'après les contraintes, $\sum_{i \in S} x_i \geq 1 - \epsilon$ pour tout $S \in \mathcal{W}, \mathcal{S} \neq N$ (si $\mathcal{V} = N$, alors toutes les contraintes du programme de moinde coeur disparaissent et dans ce cas tout vecteur est solution), on en déduit $\sum_{i \in \mathcal{V}} x_i \geq 1 - \epsilon$. Donc si $\epsilon < 0$, on en déduirait $\sum_{i \in N} x_i \geq \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i > 1$ ce qui n'est pas possible. Donc le moindre coeur et le nucléoli coïncident là aussi.. Ceci n'est plus vrai pour un jeu TU (N, V) quelconque. Par exemple si $n = 3$, $V(S) = 1$ si $|S| = 3, V(S) = \frac{1}{4}$ si $|S| = 2$ et $V(S) = 0$ si $|S| = 1$. L'imputation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ est dans le coeur et donc dans le nucléoli. Elle n'est pas dans le moindre coeur. Pour cette imputation, $\epsilon = -\frac{1}{4}$. On peut faire mieux. Par exemple, pour l'imputation égalitaire $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\epsilon = -\frac{5}{12} < \epsilon = -\frac{1}{4}$.

[94] Dans Montero (2006), l'énoncé est formulé sous la forme : "il existe un equilibre stationnaire en sous jeux parfaits dont le vecteur d'utilités espérées coïncide avec p".

seule copie du petit joueur. Montero (2016) démontre que dans le cas où $p = \left(\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}\right)$, le vecteur v d'équilibre est égal à $(\frac{5}{14}, \frac{4}{14}, \frac{4}{14}, \frac{1}{14})$. Notons au passage que le jeu n'est pas fort. Ce théorème ne contredit donc pas le théorème de Montero sur l'auto-confirmation du nucléole. Ici il n'y a pas unicité de la représentation homogène : par exemple $[7; 4, 3, 3, 1]$ est aussi une représentation homogène de ce jeu. Cependant comme le montre Montero en considérant le jeu $[20; 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ le fait qu'un protocole égal au vecteur des poids d'une représentation homogène ne produise pas un vecteur d'équilibre proportionnel aux poids n'est pas la conséquence de la mutiplicité des représentations. Ce jeu a une unique représentation homogène. Dans ce jeu un gros joueur peut être remplacé par 5 petits joueurs. Il est tentant de conjecturer que si chaque joueur est reconnu comme proposeur proportionnellement à son poids, c'est à dire avec une probabilité de $\frac{5}{34}$ pour les gros et de $\frac{1}{34}$ pour les petits, alors l'utilité espérée d'un gros joueur sera 5 fois supérieure à celle d'un petit. Cette conjecture est fausse car à l'équilibre, chaque gros joueur recoit $\frac{50}{331}$ et chaque petit joueur recoit $\frac{9}{331}$.Le point singulier dans la construction de l'équilibre est que seules les coalitions (minimales) contenant 3 gros joueurs et 5 petits sont proposées dans la randomisation.

Un point commun à ces deux exemples est que les jeux simples considérés ne sont pas de somme constante. Puisque Montero a prouvé que le nucléole est auto-confirmant, si le nucléole est proportionnel aux poids alors le vecteur des utilités d'équilibre sera aussi proportionnel aux poids. Comme cela est rappelé dans l'appendice 2, Peleg a démontré que si le jeu est de somme constante et homogène, la représentation intégrale unique issue du nucléole est une représentation intégrale minimum.

Montero introduit le concept de jeu simple *faiblement balancé*. Soit $[q; w_1, ..., w_n]$ un jeu majoritaire pondéré. Il est faiblement équilibré si la famille de coalitions $\mathcal{W}^*$ où

$$\mathcal{W}^* = \left\{ S \in \mathcal{W} : S \in \underset{T \in \mathcal{W}}{ArgMin} \sum_{i \in T} w_i \right\}$$

est équilibrée. Elle démontre le résultat fondamental suivant. Si $[q; w_1, ..., w_n]$ est un jeu majoritaire pondéré normalisé et si $p = w$ alors $v = p$ ssi le jeu $[q; w_1, ..., w_n]$ est faiblement balancé. Il n'est pas forcément facile de détecter les jeux qui sont faiblement équilibrés. Si on prend une représentation arbitraire, il est peu probable que tous les joueurs appartiennent à une coalition de W^*. En revanche avec une représentation intégrale minimale, ce sera le cas. Mais nous venons de voir que ce n'était pas suffisant pour en faire un jeu équilibré. Il est intéressant de noter que la propriété de jeu faiblement équilibré n'a pas de connexion immédiate avec la propriété d'homogénéité. Si un jeu est de somme constante et homogène, il est faiblement équilibré mais la réciproque est fausse. Par exemple, le jeu $[30; 14, 14, 12, 4, 4, 4, 4, 1, 1]$ est faiblement équilibré alors qu'il n'est ni fort, ni homogène.

Montero contient une analyse détaillée du vecteur d'équilibre du jeu de BF dans le cas de la base de données d'élections législatives considérée par Snyder, Ansolabehere et Ting (2005)[95]. Elle commence par montrer que la fréquence des cas où le vecteur est proportionnel

[95]Pour le calcul du vecteur v dans le cas des conseils des ministres de l'Europe de 1958 à nos jours, on pourra consulter Le Breton, Montero et Zaporozhets (2012).

aux poids varie beaucoup d'un pays à l'autre avec une moyenne autour de 69%. L'écart entre l'utilité d'équilibre et le poids peut en fait être considérable : le plus petit joueur peut recevoir uniquement 43% de son poids.

Enfin, il est utile de compléter notre descrition des implications de ce modèle en mentionant certaines caractéristiques qualitatives de l'équilibre. Le cas du parlement belge issu des élections de 1972 servira de base d'illustration. Ce parlement est décrit par le jeu $[13; 7, 6, 4, 3, 3, 1]$. Pour $p = \left(\frac{7}{24}, \frac{6}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24}, \frac{1}{24}\right)$, on démontre que $v = \left(\frac{46}{164}, \frac{46}{164}, \frac{23}{164}, \frac{23}{164}, \frac{23}{164}, \frac{3}{164}\right)$. D'une part, les asymétries entre certains joueurs sont gommées et d'autre part, le joueur ayant le plus petit poids reçoit une utilité deux fois moindre que son poids relatif ! Un examen minutieux des coalitions minimales qui ont une probabilité positive d'apparaître à l'équilibre dans les offres des proposeurs montre que des coalitions avec surplus peuvent apparaître. Dans cet exemple lorsque le petit joueur (le joueur 6) est en position d'offreur, il est indifférent (puisque leurs coûts sont égaux) entre les coalitions $\{1, 4, 5, 6\}$,$\{1, 3, 5, 6\}$ qui ne sont pas minimales et $\{2, 4, 5, 6\}$ qui l'est. Les stratégies mixtes décrivant les équilibres sont calculées par Montero. Considérons le tableau ci-dessous où en ligne apparaissent les joueurs (cinq types) et en colonnes les coalitions minimales (au nombre de 7 mais réduites à 5 lorsqu'on considère les types) :

	$\{1,2\}$	$\{1,3,4\}$ $\{1,3,5\}$	$\{1,4,5\}$	$\{2,3,4\}$ $\{2,3,5\}$	$\{1,4,5,6\}$
1	α	β	$1-\alpha-\beta$	$-$	$-$
2	γ	$-$	$-$	$1-\gamma$	$-$
3	$-$	μ	$-$	$1-\mu$	$-$
4, 5	$-$	π	ρ	$1-\pi-\rho$	$-$
6	$-$	$-$	$-$	$-$	1

Les équations décrivant l'équilibre sont relativement complexes et multiples. On peut montrer par exemple que $\alpha = \mu = \pi = 0$, $\beta = \frac{5}{23}, \gamma = \frac{14}{23}$ et $\rho = \frac{55}{138}$ consituent un équilibre. Mais on peut considérer d'autres équilibres (avec une colonne de plus dans le tableau ci-dessus) avec les coalitions non minimales $\{1, 3, 4, 6\}$ et $\{1, 3, 5, 6\}$. Il existe par exemple un équilibre où le joueur 6 propose $\{1, 4, 5, 6\}$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et $\{1, 3, 4, 6\}$ et $\{1, 3, 5, 6\}$ avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et $\alpha = \mu = \pi = 0, \beta = \frac{12}{161}, \gamma = \frac{14}{23}$ et $\rho = \frac{29}{92}$.

On constate que les prévisions de type Gamson de Snyder, Ansolabehere et Ting (2005) basées sur une réplication suffisamment large du jeu simple initial ne sont pas valides en l'absence de réplication. Il serait intéressant de disposer d'un théorème qui fournit des informations sur la qualité de l'approximation en fonction de l'ordre de replication[96]. Notons par ailleurs que la connaissance des utilités espérées d'équilibre ne dispense pas d'étudier les stratégies d'offres en fonction de l'identité du proposeur comme nous venons de le faire ci-dessus dans un exemple[97].

Rien n'empêche de considérer d'autres vecteurs comme par exemple le vecteur $p = \left(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ décrivant le protocole égalitaire. D'après Kalandrakis (200), nous savons que tout

[96] Sur la convergence asymptotique, voir le résultat plus puissant de Kurz, Napel et Nohn (2014).

[97] La résolution complète du système d'équations décrivant les équilibres est loin d'être immédiate (Kalandrakis (2016)).

vecteur du simplexe peut être obtenu comme vecteur des utilités espérées d'équilibre pour un choix approprié du vecteur p. Nous avons concentré notre attention ici sur des vecteurs p déduits de certaines représentations du jeu.

Les prédictions du jeu BF ne sont donc pas orthogonales à celles de la théorie des jeux coopératifs à ceci près qu'il semble souhaitable de remplacer la proportionalité aux poids de la solution de Gamson par des solutions de marchandage comme par exemple le nucléole ou les imputations du nucléoli.

Pour conclure, il nous semble important d'insiter une fois de plus sur le fait que les prévisions de ce jeu non-coopératif, aussi canonique et naturel soit-il, peuvent changer sous l'effet de modifications en apparence assez bénignes du jeu. Notons aussi que l'intérêt du jeu de marchandage considéré ici est de définir de facon endogène les valeurs de continuation. Toute version finie de ce jeu, c'est à dire un jeu du type "jeu d'ultimatum", reposera de manière exagérée et ad hoc sur les utilités de l'option défaut décrivant la situation dans le cas d'un échec définitif des négociations.

4.2 Test/Validation/Rejet Empirique

La confrontation des théories présentées dans cet article aux bases de données disponibles soulève de nombreuses questions difficiles. Nous n'allons pas procéder à un inventaire exhaustif des travaux réalisés mais plutôt donner un apercu de quelques uns d'entre eux et des difficultés que soulève ce travail de validation empirique dans le cas des coalitions gouvernementales.

En abordant la question de la formation des coalitions dans l'étude des alliances gouvernementales, nous avons déjà présenté des tableaux suggérant la plus ou moins grande performance de telle ou telle théorie. Les statistiques considérées par les auteurs sont souvent non complètement accompagnées d'analyses statistiques approfondies

Supposons, comme dans la section 2, que le chercheur dispose d'une base de données historiques (la période couverte pouvant être plus ou moins longue) portant sur les élections législatives et la formation des gouvernements de plusieurs pays[98]. Il faut d'abord se mettre d'accord sur ce qu'est une unité d'observation. S'agit-il d'un nouveau gouvernement à chaque fois qu'un nouveau gouvenement voit le jour ? S'agit-il d'une nouvelle élection ? Une fois cette question tranchée, pour chaque pays i, situation t et parti j du pays i impliqué dans la situation t, on codera $X_{ijt} = 1$ si le parti j est dans le gouvernement et $X_{ijt} = 0$ sinon.

Le taux de succès d'une théorie peut etre mesuré de multiples facons. Comment les premiers auteurs, notamment Browne (1970), De Swann (1973) et Taylor et Laver (1973) ont-ils procédé ? On peut commencer naïvement en considérant comme taux de succès le ratio entre le nombre total d'observations compatibles avec la théorie et le nombre total d'observations. La table ci-dessous contient des informations de cette nature. Trivialement lorsqu'une théorie est plus large, son taux de succès sera alors mécaniquement plus élevé.

[98] On y trouve généralement l'Autriche, la Belgique, le Danemark, la Finlande, l'Allemagne, l'Islande, l'Irlande, Israel, l'Italie, le Luxembourg, les Pays Bas, la Norvège, la Suède, la France (sous la Quatrième république) et la Suisse.

Comme le note Browne: "The point of all this is that we should not judge the predictive ability of a theory solely on the number of correct predictions it can produce. If that was the only operative criterion, we should simply say that at any given time all the possible coalitions will form. This statement has a 100% predictive ability, but is theoretically meaningless. What is also important in predicting outcomes is the size of the solution set relative to the number of possible winning coalitions. *The problem is to find a method of comparison that unloads the dice so as to put the competing theories on an equal basis*".

Insérer la table 5 de Browne ici

Pour neutraliser l'effet de la "permissivité" d'une théorie, et évaluer la performance relative d'une théorie donnée contre une hypothèse alternative, on peut songer recourir à la théorie des tests statistiques.

On peut par exemple prendre comme hypothèse nulle, la théorie la plus large, l'hypothèse de hasard pur qui revient ici à supposer que toutes les coalitions gagnantes du jeu simple $(N, \mathcal{W})$ sont équiprobables. Supposons que nous ayons une base de données où la famille $\mathcal{W}$ reste inchangée (on observe un pays donné entre deux élections parlementaires) mais où le gouvernement change à de multiples reprises disons à T reprises. Dans ce cas, les fréquences empiriques des différentes coalitions de $\mathcal{W}$ devraient toutes être voisines de $\frac{1}{|\mathcal{W}|}$. Pour évaluer si tel est le cas, on peut songer à tester l'hypothèse simple de hasard pur contre une autre hypothèse simple : seules les coalitions de la sous-famille $\mathcal{W}^*$ sont à considérer et elles sont toutes équiprobables. Notons au passage que l'hypothèse ne peut pas exactement être formulée de la sorte car puisque son support est un sous-ensemble propre de $\mathcal{W}$ elle pourrait être falsifiée ou validée avec une probabilité égale à 1. Il serait plus opportun d'écrire que les coalitions de $\mathcal{W}^*$ sont beaucoup plus probables que les autres. Pour examiner une telle hypothèse (non complètement formellement traduite en termes de probabilités) on peut calculer pour chaque coalition S dans $\mathcal{W}^*$, la fréquence empirique $\widehat{p}_S$:

$$\widehat{p}_S \equiv \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{tS}}{T} \text{ où } X_{tS} = \begin{cases} 1 \text{ si } S \text{ est le gouvernement observé en } t \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Puis on calcule la moyenne emprique $\widehat{p}^*$ de ces fréquences sur $\mathcal{W}^*$:

$$\widehat{p}^* = \frac{\sum_{S \in \mathcal{W}^*} \widehat{p}_S}{|\mathcal{W}^*|}$$

et l'on compare cette fréquence à $\frac{1}{|\mathcal{W}|}$. Intuitivement si $\widehat{p}^*$ est significativement plus élevé que $\frac{1}{|\mathcal{W}|}$, on est enclin à conclure que cette théorie est supérieure à la théorie du hasard pur. Notons que comparer $\widehat{p}^*$ et $\frac{1}{|\mathcal{W}|}$ est équivalent à comparer $\frac{\sum_{t=1}^{T} \sum_{S \in \mathcal{W}^*} X_{tS}}{|\mathcal{W}^*|} = \frac{\sum_{S \in \mathcal{W}^*} \sum_{t=1}^{T} X_{tS}}{|\mathcal{W}^*|} \equiv \frac{X^*}{|\mathcal{W}^*|}$ et $\frac{T}{|\mathcal{W}|}$où X^* est le nombre de fois où le gouvernement est dans la famille $\mathcal{W}^*$. Dans le cas de la base de données de Browne, si l'on considére la Finlande et la théorie de Leiserson, on a (cf. la table ci-dessous) : $|\mathcal{W}| = 1519$, $|\mathcal{W}^*| = 237$, $T = 21$ et $X^* = 5$. Ici on compare $\frac{5}{235} = 2.127\,7 \times 10^{-2}$ et $\frac{21}{1519} = 1.382\,5 \times 10^{-2}$. Le facteur mulitplicatif de 2 plaide en faveur d'un rejet de l'hypothèse de hasard pur.

Insérer la table 6 de Browne ici

Ce test d'une hypothèse simple contre une autre hypothèse simple n'est pas complètement rigoureusement écrit. Par ailleurs, nous avons supposé que les données étaient telles que les familles $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}^*$étaient invariantes dans la base mais en pratique la base de données comprend une multiplicité d'élections parlementaires (et donc de situations de formation d'un gouvernement)[99]. Comment les agrège-t-on ? Certains auteurs mettent tout dans un pot commun : T est le nombre total d'observations, $\mathcal{W}^*$ est l'ensemble des coalitions de la théorie et $\mathcal{W}$ est l'ensemble des coalitions gagnantes... La question de l'agrégation des ces données hétérogènes, quoique discutée, n'a pas semble-t-il reçu de réponse satisfaisante.

Même si on laisse de côté ces difficultés, la question du meilleur test reste posée. Si l'on souhaite tester l'hypothèse de hasard pur, on peut songer utiliser le test d'adéquation classique qui calcule la distance du χ^2 entre la loi théorique et la loi empirique observée. Ce test permet d'accepter ou rejeter l'hypothèse de hasard pur mais pas de rejeter ou accepter l'hypothèse $\mathcal{W}^*$. Pour le faire, il faudrait spécifier une hypothèse simple ou une hypothèse composite décrivant $\mathcal{W}^*$. Cette fois on conduirait le test d'adéquation en partant d'une hypothèse composite énoncant par exemple que la famille de lois de probabilité décrivant l'hypothèse simple est à support presque entièrement égal à $\mathcal{W}^*$. On peut aussi faire des tests s'appuyant sur le ratio de vraisemblance. Supposons que nous écrivions l'hypothèse $\mathcal{W}^*$ sous une forme probabiliste Θ^*. Le complément est l'ensemble des distributions de probabilité P sur $\mathcal{W}$ qui ne sont pas contenues dans Θ^*, c'est-à-dire, en notant Θ l'ensemble total des distributions de probabilité, l'ensemble $\Theta \backslash \Theta^*$. Le ratio de vraisemblance $\Lambda(X)$ lorsque les données observées sont décrites par le vecteur X est défini comme suit :

$$\Lambda\left(X\right) \equiv \frac{\underset{\theta \in \Theta^*}{Sup} L(X \mid \theta)}{\underset{\theta \in \Theta}{Sup} L(X \mid \theta)}$$

Intuitivement, plus ce ratio est proche de 1 plus il est vraisemblable que la théorie $\mathcal{W}^*$ dans sa déclinaison Θ^* soit valide. On peut là aussi définir un test du χ^2 en considérant la statistique $-2 \log \Lambda$ qui d'après le théorème de Wilks converge vers un $\chi^2\left(\dim \Theta - \dim \Theta^*\right)$.

Une autre manière d'aborder le test d'une théorie $\mathcal{W}^*$ promue par Mokken (1973), De Swann et Mokken (1980) et Taylor et Laver (1973) est de considérer le tirage aléatoire de $|\mathcal{W}^*|$ coalitions dans l'ensemble $\mathcal{W}^*$. Dans ce cas, l'ensemble des réalisations devient l'ensemble des sous-ensembles de cardinalité $|\mathcal{W}^*|$. On contraste l'hypothèse simple "cet ensemble est exactement l'ensemble $\mathcal{W}^*$" contre une autre hypothèse simple "cet ensemble est tiré au hasard parmi tous les ensembles de cardinalité $|\mathcal{W}^*|$". L'idée est que l'échantillon réel de taille T est vu comme un échantillon de taille $|\mathcal{W}^*|$: on tire au hasard $|\mathcal{W}^*|$ coalitions[100]

[99]Dans son renvoi en bas de page 9, Browne aborde cete question.

[100]Chez Mokken et De Swann et Mokken, il s'agit d'un tirage sans remise alors que chez Taylor et Laver, il s'agit d'un tirage avec remise.

et dans ces $|\mathcal{W}^*|$ coalitions, certaines, en nombre T, sont réellement observées et certaines ne le sont pas. En considérant un nombre Q quelconque tel que $Q \leq Min\,(T, |\mathcal{W}^*|)$, on peut calculer la probabilité $\pi(Q; |\mathcal{W}^*|, T, |\mathcal{W}|)$ que dans l'échantillon aléatoire, Q coalitions fassent partie des T coalitions observées :

$$\pi(Q; |\mathcal{W}^*|, T, |\mathcal{W}|) = \frac{\binom{T}{Q}\binom{|\mathcal{W}|-T}{|\mathcal{W}^*|-Q}}{\binom{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}^*|}}$$

En notant Q^* le nombre d'observations compatibles avec la théorie $\mathcal{W}^*$, on peut donc calculer la probabilité que dans l'échantillon aléatoire, au moins Q^* coalitions fassent partie des T coalitions observées. Cette probabilité est égale à :

$$\pi(Q^*) \equiv \sum_{Q=Q^*}^{Min(T,|\mathcal{W}^*|)} \pi(Q; |\mathcal{W}^*|, T, |\mathcal{W}|)$$

A partir de là, ils utilisent un test global du χ^2 basé sur un résultat de Fisher qui permet de combiner les résultats de tests disjoints (en particulier Q^* peut varier d'un test à l'autre). Par exemple, si nous disposons de J tests indépendants, on déduit du résulat de Fisher que la statistique :

$$T = -2\sum_{j=1}^{J} \log \pi(Q_j^*)$$

est distribuée comme un $\chi^2\,(2J)$). Par conséquent, une valeur élevée de la statistique T peut être interprétée comme une déviation de l'hypothèse aléatoire mais aucunement comme une validation définitive de la théorie $\mathcal{W}^*$. Comme le note fort à propos Mokken, le rejet de l'hypothèse aléatoire est une condition nécessaire mais non suffisante de la validité de la théorie $\mathcal{W}^*$.

Cette littérature des débuts a donné lieu à de nombreux débats méthodologiques. La théorie des tests a été progressivement reléguée au second plan et remplacée par d'autres approches statistiques. Par exemple, Franklin et Mackie (1984) appliquent les méthodes classiques de régression multiple en considérant comme unité d'obervation toutes les coalitions potentielles. Cela signifie pratiquement que si au terme d'élections parlementaires à une date t dans un pays j, $|\mathcal{W}_{t,j}|$ coalitions différentes sont susceptibles de former un gouvernement, pour tout $k = 1, ..., |\mathcal{W}_{t,j}|$, ils codent $X_{k,j,t} = 1$ si la coalition k est le gouvernement observé et $X_{k,j,t} = 0$ sinon. Au nombre des régresseurs, ils prennent en compte toutes les caractéristiques qualitatives ou quantitatives des coalitions auxquelles les théories font référence : coalition gagnante minimale, coalition connectée, taille de la coalition, poids de la coalition, etc,.. et les combinent à souhait pour créer autant de termes interactifs. Ils appliquent cette méthode pour expliquer dans un modèle unifié l'origine des différences entre les différentes conclusions obtenues par les différents auteurs en présentant les différences entre les approches de Brown d'une part et De Swann et Mokken et Taylor et Laver d'autre part comme des différences de stratégies de pondération.

Ces approches ont elles-mêmes été battues en brèche et abandonnées au profit de la méthode de maximum de vraisemblance appliquée à un modèle statistique qui respecte la nature du problème. En prenant comme unité d'analyse dans ces analyses de régression les coalitions potentielles, leurs auteurs ignorent de facto que ces variables sont corrélées par définition, puiqu'il n'y a (pour chaque observation) qu'un seul gouvernement. Par ailleurs, dans la mise en oeuvre de ces méthodes, le choix de la stratégie de pondération a un impact considérable sur la nature des résultats obtenus suggérant leur caractère un peu artificiel. Une approche naturelle consiste à considérer ce problème comme un problème de choix polytomique non ordonné. On peut par exemple considérer comme le font Martin et Stevenson (2001) des paramétrisations particulières de la distribution multinomiale comme le logit multinomial (MacFadden (1973)). Notons cependant ici que l'ensemble des valeurs possibles de ce vecteur aléatoire discret est l'ensemble des coalitions de $\mathcal{W}^*$ (voire plus si l'on ne restreint pas aux coalitions gagnantes). Les caractéristiques des pays et des coalitions sont introduites selon les mêmes principes que ceux de l'analyse économétrique des choix discrets.

Nous avons alerté le lecteur à plusieurs reprises sur le fait que les analyses théoriques de la formation des coalitions et du partage des gains au sein des coalitions étaient conduites séparément. Le même constat s'applique aux analyses empiriques de ces questions. Les tentatives d'une approche théorique unifiée reste encore embryonnaires mais l'approche empirique évolue rapidement concernant les coalitions gouvernementales. Cutler, De Marchi, Gallop, Hollenbach, Laver et Orlowski (2016) introduisent un modèle statistique pour prédire simultanément l'identité la coalition gagnante qui formera le gouvernement et le partage des portefeuilles minisitériels. Ils souhaitent en plus ce faisant comprendre l'énigmatique écart entre la loi empirique de Gamson d'une part et les prévisions des modèles de marchandage d'autre part qu'ils soient d'ailleurs coopératifs ou non. Si la loi de Gamson gouvernait l'allocation des ressources au sein des gouvernements, les coalitions observées seraient conforme à l'hypothèse de Gamson-Riker, ce qui n'est pas validé empiriquement. Quant à la théorie, nous avons vu que les prédictions de marchandage sont souvent distantes de Gamson. Nous venons de voir que l'approche non-coopérative, elle-aussi, aboutit à des prédictions différentes: les résultats de proportionnalité décrivant les utilités ex ante utilisent les poids de représentation et non les poids réels et les résultats ex post décrivent un avantage très net au formateur. Le divorce entre cette régularité empirique et la théorie est répertorié sous le nom de "Portfolio Allocation Paradox" (Warwick et Druckman (2006))[101]. Cutler et al introduisent un modèle statistique où l'unité d'observation est un parti politique dans une situation de formation du gouvernement. La variable dépendante est la part de portefeuilles du parti dans le gouvernment où la valeur 0 est interprétée comme signifiant que le parti ne fait pas partie du gouvernement. L'ingéniosité de leur démarche est de choisir comme loi de probabilité un mélange de la masse de Dirac en 0 et d'une loi beta dont les paramètres dépendent linéairement à la fois des poids réels et des poids de la représentation minimale intégrale. Les paramètres sont estimés par maximum de vraisemblance avec bootstrap. Les résultats obtenus montrent une relation négative entre la probabilité de faire partie du gou-

[101]Carroll et Cox (2007) écrivent : "All modern baragaining models predict that Gamson's Law *should not* hold".

vernement et les deux poids. En revanche, les poids réels sont de bien meilleurs prédicteurs que les poids de représentation concernant les parts de portefeuilles.

Pour l'heure, les tentatives de réconciliation entre la théorie et la loi de Gamson se limitent à quelques essais isolés. Bassi (2013) l'obtient dans le cadre d'un modèle de marchandage assez peu naturel. Carroll et Cox (2007) en revanche l'obtiennent en augmentant le jeu de Baron et Ferejohn par une étape en amont où les partis peuvent signer une alliance pré-électorale. Cette alliance consiste en la promesse de former une coalition de gouvernement en cas de victoire électorale et de répartir les portefeuilles selon une clé d'ores et déjà fixée. Ils démontrent qu'à l'équilibre, les partis s'engagent dans des alliances pré-électorales et des clés de répartition de type Gamson.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons procédé à un tour d'horizon critique et inévitablement sélectif des études théoriques et empiriques consacrées à l'analyse en termes de jeux coopératifs des alliances gouvernementales et électorales. Même si elle fournit des éclairages utiles pour structurer le travail emprique et l'analyse des données, cette abondante littérature est loin d'avoir répondu à toutes les questions posées. Nous avons vu que certaines énigmes , au premier rang desquelles la Loi de Gamson, résistent à l'explication théorique. A n'en point douter, les recherches en cours et futures apporteront des éclairages nouveaux sur ces questions importantes de science politique.

6 References

Ansolabehere, S., J. M. Snyder, A. B. Strauss, and M. M. Ting (2005) "Voting Weights and Formateur Advantages in the Formation of Coalition Governments", *American Journal of Political Science*, 49, 550–63.

Aumann, R.J. and J.H. Drèze (1974) "Cooperative games with Coalition Structures", *International Journal of Game Theory*, 3, 217-237.

Aumann RJ et M. Maschler (1964) "The bargaining set for cooperative games", in Dresher M, Shapley LS, Tucker AW (eds.) Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, 443–476.

Austen-Smith, D. and J.Banks (1988) "Elections, Coalitions, and Legislative Outcomes", *American Political Science Review*, 82, 405-422.

Austen-Smith, D. and J.Banks (1990) "Stable Governments and the Allocation of Policy Portfolios", *American Political Science Review*, 84, 891-906.

Austen-Smith, D. (1996) "Refinements of the Heart", Chapitre 9 dans *Collective Decision-Making: Social Choice and Political Economy*, Schofield, N. (Ed), Kluwer Academic Publishers.

Austen-Smith, D. and J. S. Banks. (1999) *Positive Political Theory I, Collective Preferences*, The University of Michigan Press.

Austen-Smith, D. and J. S. Banks. (2005) *Positive Political Theory II, Strategy and Structures*, The University of Michigan Press.

Axelrod, R. (1970) *Conflict of Interest: A Theory of Divergent Goals with Applications to Politics*, Chicago: Markham.

Axelrod, R. (1972) "Where the Votes Come From : An Analysis of Electoral Coalitions, 1952-1968", *American Political Science Review*, 66, 11-20.

Balinski, M.L. et H.P. Young (1978) "The Jefferson method of apportionment", *SIAM Review*, 20, 278–284.

Balinski, M.L. et H.P. Young (2001) *Fair Representation*, Second Edition, Brookings Institution Press.

Banerjee, S., Konishi, H. et T. Sönmez (2001) "Core in a simple coalition formation game", *Social Choice and Welfare*, 18, 135-153.

Banks, J.S. and J. Duggan (2000) "A Bargaining Model of Collective Choice", *American Political Science Review,* 94, 73-88.

Banks, J.S., Duggan, J. and M. Le Breton. (2006) "Social Choice and Electoral Competition in the General Spatial Model", *Journal of Economic Theory*, 126, 194-234.

Banzhaf, J.F. III. (1965) "Weighted Voting Doesn't Work : A Mathematical Analysis", *Rutgers Law Review,* 19, 317-343.

Bartholdi III J.J., Narasimhan L.S. et C.A. Tovey (1991): Recognizing majority-rule equilibrium in spatial voting game, *Social Choice and Welfare*, 8, 183–97.

Baron, D. P. and J. A. Ferejohn (1989) "Bargaining in Legislatures", *American Political Science Review,* 83, 1181-1206.

Bassi, A. (2013) "A Model of Endogenous Government Formation", *American Journal of Political Science*, 57, 777-793.

Benoit, K. et M. Laver (2015) "The Basic Arithmetic of Legislative Decisions", *American Journal of Political Science*, 59, 275-291.

Bianco, W.T., Jeliazkov, I. et I. Sened (2004) "The uncovered set and the limits of legislative action", *Political Analysis*, 12, 256–78.

Blais, A. et I.H. Indridason (2007) "Making Candidates Count : The Logic of Electoral Alliances in Two-Round Legislative Elections", *Journal of Politics*, 69, 193-205.

Bochsler, D. (2010) "Who gains from apparentments under D'Hondt?", *Electoral Studies*, 29, 617–627.

Bogomolnaia, A. et M.O. Jackson (2002) "The stability of hedonic coalition structures", *Games and Economic Behavio*r, 38, 201–230.

Bondareva, O.N. (1963) "Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games", *Problemy Kibernetiki*, 10,119-139. [en Russe]

Born, P. et J. Suijs (2001) "Stochastic Cooperative Games: Theory and Applications", Tilburg University, Mimeo.

Bochsler, D. (2010) "Who gains from apparentments under D'Hondt?", *Electoral Studies*, 29, 617–627.

Brown, P.J. et C.D. Payne (1986) "Aggregate Data, Ecological Regression, and Voting Transitions", *Journal of the American Statistical Association*, 81, 452-460.

Browne, E.C. (1971) "Testing Theories of Coalition Formation in the European Context", *Comparative Political Studies*, 3 (I971), 391-411.

Browne, E. C, and M.N. Franklin (1973) "Aspects of Coalition Payoffs in European Parliamentary Democracies", *American Political Science Review*, 67, 453-469.

Brown, E.C. and J.P. Frendreis (1980) "Allocating Coalition Payoffs by Conventional Norm: An Assessment of the Evidence from Cabinet Coalition Situations", *American Journal of Political Science* 24, 753-768.

Campbell, P. (1951) "Remarques sur les Effets de la Loi Electorale Française du 9 Mai 1951", *Revue Française de Science Politique*, 1, 498-502.

Carroll, R. et G. W. Cox (2007) The Logic of Gamson's Law: Pre-election Coalitions and Portfolio Allocations", *American Journal of Political Science*, 51, 300–313.

Chua, V. and D. S. Felsenthal. (2008a) Coalition formation theories revisited: An empirical investigation of Aumanns hypothesis, in *Power, Freedom, and Voting: Essays in Honour of Manfred J. Holler*, Braham, M. et F. Steffen (Eds), Springer, 159-183.

Chua, V. and D. S. Felsenthal. (2008b) "Do Voting Power Considerations Explain the Formation of Political Coalitions? A Reevaluation", *Homo Oeconomicus*, 25, 141–167.

Cutler, J., de Marchi,S., Gallop, M., Hollenbach, F.M., Laver, M. et M.Orlowski (2016) "Cabinet formation and portfolio distribution in European multi-party systems", *British Jouranl of Political Science*, 46, 31-43.

Damme, van E. (1998) "On the State of the Art in Game Theory: An Interview with Robert Aumann", *Games and Economic Behavior*, 24, 181-210.

Davis M et M. Maschler M (1967) "Existence of stable payoff configurations for cooperative games", in Shubik M (ed.) *Essays in Mathematical Economics in Honour of Oskar Morgenstern*, Princeton University Press, Princeton, 39–52.

Dodd, L. (1974) "Party Coalitions in Multiparty Parliaments; A Game Theoretic Analysis", *American Political Science Review*, 68, 1093-1115.

De Clippel G. and R. Serrano (2008) "Marginal Contributions and Externalities in the Value", *Econometrica*, 76, 1413-1436.

Dequiedt, V., Durieu, J. et P. Solal (2011) *Théorie des Jeux et Applications*, Economica.

De Swann, A. (1973) *Coalition Theories and Cabinet Formation*, Elsevier, Amsterdam.

De Swann, A. et R.J. Mokken (1980) "Testing Coalition Theories: The Combined Evidence" in Lewin, L and E. Vedung (Eds), *Politics and Rational Action*, Dordrecht, Reidel.

Downs, A. (1957) *An Economic Theory of Democracy*, Prentice Hall.

Drèze, J. H. et J. Greenberg, (1980) "Hedonic coalitions: optimality and stability", *Econometrica*, 48, 987–1003

Dunz, K. (2011) "Bargaining over the Distribution of Seats in French Regional Elections", American University of Paris, Mimeo.

Dutta, B., Ray, D., Sengupta, K. et R. Vohra (1989) " A Consistent Bargaining Set", *Journal of Economic Theory*, 49, 93-112.

Duverger, M. (1954), *Les Partis Politiques*, Armand Colin.

Einy, E. (1985a) "On Connected Coalitions in Dominated Simple Games", *International Journal of Game Theory*, 14, 103-125.

Einy, E. (1985b) " The Desirability Relation of Simple Games", *Mathematical Social Sciences*, 10, 155-168.

Einy, E. et D. Wettstein (1996) "Equivalence Between Bargaining Sets and the Core in Simple Games", *International Journal of Game Theory*, 25, 65-71.

Eraslan, H. (2002) "Uniqueness of Stationary Equilibrium Payoffs in the Baron-Ferejohn Model", *Journal of Economic Theory,* 103, 11-30.

Eraslan, H. et A. McLennan (2013) "Uniqueness of stationary equilibrium payoffs in coalitional bargaining", *Journal of Economic Theory*, 148, 2195–2222.

Feld, S., Grofman, B. et N. Miller (1988) "Centripetal forces in spatial voting: On the size of the Yolk", *Public Choice*, 59, 37-50.

Feld, S., Grofman, B. et N. Miller (1989) "The Geometry of majority Rule", *Journal of Theoretical Politics*, 1, 379-406.

Feld, S.L., Grofman, B., Hartly, R., Kilgour, M., Miller, N.R. et N. Noviello (1987) "The Uncovered Set in Spatial Voting Games", *Theory and Decision*, 23, 129-155.

Forcina, A., Ganldi, M. et B. Bracalente (2012) "A revised Brown and Payne model of voting behaviour applied to the 2009 elections in Italy", *Statistical Methods and Applications*, 21, 109-119.

Franklin, M.N. et T.M. Mackie (1984) "Reassessing the Importance of Size and Ideology for the Formation of Governing Coalitions in Parliamentary Democracies", *American Journal of Political Science*, 28, 671-692.

Freixas, J. et X. Molinero (2009) "On the Existence of Minimum Integer Representation for Weighted Voting Systems", *Annals of Operations Research*, 166, 243-260.

Freixas, J. et X. Molinero (2010) "Weighted Games without a Unique Minimal Representation in Integers", *Optimization Methods and Software*, 25, 203-215.

Freixas, J., Molinero, X. and S. Roura (2007) "Minimal Representations for Majority Games", in *Computations and Logic in the Real World*, Lecture Notes in Computer Science, Vol 4497, Springer Verlag, 297-306.

Gamson, W.A. (1961) “A Theory of Coalition Formation”, *American Sociological Review* 26, 373-382.

Golder, M., Golder, S.N. et D.A. Spiegel (2012) "Modeling the Institutional Foundation of Parliamentary Government Formation", *The Journal of Politics*, 74, 427–445.

Golder, M., Golder, S.N. et D.A. Spiegel (2014) "Evaluating a Stochastic Model of Government Formation", *Journal of Politics*, 76, 880-886.

Golder, S.N. (2006) *The Logic of Pre-Electoral Coalition Formation*, The Ohio State University Press.

Golder, S.N. et J.A. Thomas (2013) "Portfolio Allocation and the Vote of No Confidence", British Journal of Political Science, 1-11.

Granot, D. (1977) "Cooperative Games in Stochastic Characteristic Function Form ", *Management Science*, 23, 621-630.

Greenberg, J. (1990) *The Theory of Social Situations*, Cambridge University Press.

Gurk, H.M. and J.R. Isbell (1959) "Simple Solutions" in *Annals of Mathematics Studies, Contributions to the Theory of Games IV*, Volume 40, Princeton University Press, 247-265.

Hafalir, I.E. (2007) "Efficiency in Coalition Games with Externalities", *Games and Economic Behavior*, 61, 242-258.

Hart, S. (2005) "An Interview with Robert Aumann", *Macroeconomic Dynamics*, 9, 683-740.

Hart, S. et M. Kurz (1983) "Endogenous Formation of Coalitions", *Econometrica*, 51, 1047-1064.

Holzman, R., Peleg, B. et P. Sudhölter (2007) "Bargaining Sets of Majority Voting Games", *Mathematics of Operations Research*, 32, 857-872.

Isbell, J.R. (1959) "On the Enumeration of Majority Games", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation,* 13, 21-28.

Isbell, J.R. (1969) "A Counterexample in Weighted Majority Games", *Proceedings of the American mathematical Society,* 20, 590-592.

Jackson, M. O. and B. Moselle. 2002. "Coalition and Party Formation in a Legislative Voting Game", *Journal of Economic Theory*, 103, 49–87.

Janson, S. (2014) "Asymptotic bias of some election methods", *Annals of Operations Research,* 215, 89–136.

Jelnov, A. (2014) Existence of dominant players and their role in the formation of a cabinet coalition, Ariel University, Mimeo.

Jelnov, A. et P. Jelnov (2016) The Ruling Party and its Voting Power, Ariel University, Mimeo.

Kalandrakis, T. (2006) "Proposal Rights and Political Power", *American Journal of Political Science*, 50, 441-448.

Kalandrakis, T (2016) "Computation of equilibrium values in the Baron and Ferejohn bargaining model", *Games and Economic Behavior*, à paraitre.

Karpov, A. (2015) "Alliance Incentives under the D'Hondt Method", *Mathematical Social Sciences*, 74, 1-7.

Keiding, H. (2015) *Game Theory: A Comprehensive Introduction*, World Scientific.

Koehler, D.H. (1990) "The Size of the Yolk: Computations for Odd and Even-Numbered Committees", *Social Choice and Welfare*, 7, 231-245.

Kopelowitz, A. (1967) "Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of N-Person Games", Mimeo.

Krohn, I. and P. Sudhölter (1995) "Directed and Weighted Majority Games", *Mathematical Methods of Operations Research*, 42, 189-216.

Kurz, S. (2012) "On Minimum Sum Representations for Weighted Voting Games", *Annals of Operations Research*, 196, 361-369.

Kurz, S., Nohn, A. et S. Napel (2014) "The nucleolus of large majority games", *Economics Letters*,123, 139-143.

Laver, M. (1998) "Models of Government Formation", *Annual Review of Political Science* 1, 1-25.

Laver, M. and N. Schofield (1998) *Multiparty Governments: The Politics of Coalitions in Europe*, University of Michigan Press.

Laver, M. and K.A. Shepsle (1996) *Making and Breaking Governments*, Cambridge University Press.

le Bras, H. (2016) *Le Nouvel Ordre Electoral: Tripartisme contre Démocratie*, Seuil.

Le Breton, M.; Ortuno-Ortin, I. and S. Weber (2008) "Gamson's Law and Hedonic Games", *Social Choice and Welfare*, 30, 57-67.

Le Breton, M., Montero, M. et V. Zaporozhets (2012) "Voting Power in the EU Council of Ministers and Fair Decision Making in Distributive Politics", *Mathematical Social Sciences*, 63, 159-173.

Le Breton, M., Sudhölter, P. et V.Zaporozhets (2012) "Sequential Legislative Lobbying", *Social Choice and Welfare*, 39, 491-520.

Le Breton and K. Van Der Straeten (2013) "Alliances Electorales entre Deux Tours de Scrutin : Le Point de Vue de la Théorie des Jeux Coopératifs et une Application aux Elections Réguinales de Mars 2010", *Revue Economique*, 64, 173-240.

Le Breton, M. et V. Zaporozhets (2010) "Sequential Legislative Lobbying under Political Certainty", *Economic Journal*, 120, 281-312.

Lee, M., McKelvey, R.D. and H. Rosenthal (1979) "Game Theory and the French Apparentements of 1951", *International Journal of Game Theory*, 8, 27-53.

Lee, M. and H. Rosenthal (1976) "A Behavioral Model of Coalition Formation : The French Apparentements of 1951", *Journal of Conflict Resolution*, 20, 563-

Legros, P. (1981) "A Note on the Nucleolus of Three-Person Games", University of Paris, Mimeo.

Leiserson, M.A. (1966), Coalitions in Politics: A theoretical and Empirical Study, doctoral dissertation, Yale University, Mimeo.

Leutgäb, P. et Pukelsheim, F. (2009) "List apparentements in local elections–A Lottery", *Homo Oeconomicus*, 26, 489–500.

Loeb, D.E. and A.R. Conway (2000) "Voting Fairly: Transitive Maximal Intersecting Family of Sets", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 91, 386-410.

Mas-Colell, A. (1989) "An equivalence theorem for a bargaining set, *Journal of Mathematical Economics*, 18, 129-139.

Martin, L.W. et R.T. Stevenson (2001) "Government in Parliamentary Democracies", *American Journal of Political Science*, 45, 33-50.

Martin, L.W. et G.Vanberg (2014) "A Step in the Wrong Direction: An Appraisal of the Zero-Intelligence Model of Government Formation", *Journal of Politics*, 76 , 873-879.

Maschler, M. (1966) "The inequalities that determine the bargaining set $\mathcal{M}_1^{(i)}$", *Israel Journal of Mathematics*, 4,127–134.

Maschler M,. Peleg B et L.S. Shapley (1972) "The kernel and bargaining set for convex games", International", Journal of Game Theory, 1, 73-93.

Maschler, M. (1992) "The Bargaining Set, Kernel and Nucleolus: a Survey" in *Handbook of Game Theory*, R.J. Aumann and S. Hart (Eds), Amsterdam, Elsevier.

Maschler, M., Solan, E. et S. Zamir (2013) *Game Theory*, Cambridge University Press.

Maskin, E. (2003) "Bargaining, Coalitions and Externalities", Presidential Address to the Econometric Society, Institute for Advanced Study, Princeton, Mimeo.

Maskin, E. (2004) "Bargaining, Coalitions and Externalities", Second Toulouse Lectures in Economics, Slides.

McCarthy, C. et T.M. Ryan (1977) "Estimates of Voter Transition Probabilities from the British General Elections of 1974", *Journal of the Royal Statistical Society*, 140, 78-85.

McFadden, D. (1973) "Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice behavior", in *Frontiers of Econometrics*, P. Zarembka (Ed), Academic Press, New York.

Mc Kelvey, R.D. (1976) " Intransitivities in Multidimensional Voting Models and Some Implications for Agenda Control", *Journal of Economic Theory*, 12, 472-482.

Mc Kelvey, R.D. (1979) " General Conditions for Global Intransitivities in Formal Voting Models", *Econometrica*, 47, 1086-1112.

Mc Kelvey, R.D. (1986) " Covering, dominance, and institution-free properties of social choice", *American Journal of Political Science*, 30, 283–314.

McKelvey, R.D. et R. Rosenthal (1978) "$N-$Person Cooperative Game Theory and Spatial Models of Politics: Empirical Analysis of Electoral Coalitions in France." in Game Theory and Political Science, P. Ordeshook (Ed)New York: NYU Press.

Miller, N.R. (2007) "In Search of the Uncovered Set", *Political Analysis*, 15, 21-45.

Mokken, R.J. (1973) "A Simple Model for Testing Coalition Theories", Appendix 2 in De Swann, A. *Coalition Theories and Cabinet Formation*, Elsevier, Amsterdam,304-307.

Montero, M. (2005) "On the Nucleolus as a Power Index", *Homo Oeconomicus*, 22, 551-567

Montero, M. (2006) "Noncooperative Foundations of the Nucleolus in Majority Games", *Games and Economic Behavior,* 54, 380-397.

Montero, M. (2016) "Proportional payoffs in legislative bargaining with weighted voting: a characterization", University of Nottingham, Mimeo.

Mueller, D.C. (2003) *Public Choice III*, Cambridge University Press.

Myerson , R.B. (1980) "Conference Structures and Fair Allocation Rules", *International Journal of Game Theory*, 9, 169-182.

Myerson, R. (1991) *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press.

Nakamura, K. (1979) "the Vetoers in a Simple Game with Ordinal Preferences", *International Journal of Game Theory*, 8, 55-61.

Ordershook, P.C. (1986) *Game Theory and Political Theory*, Cambridge University Press.

Osborne, M. et A. Rubinstein (1994) *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Cambridge.

Ostmann, A. (1987) "On the Minimal Representation of Homogeneous Games", *International Journal of Game Theory*, 16, 69-81.

Owen, G. (2001) *Game Theory*, California: Academic Press.*Cooperative Games*, Kluwer Academic Publishers.

Parigi, P. et P.S. Bearman (2008) "Spaghetti politics: Local electoral systems and alliance structure in Italy, 1984-2001", *Social Forces*, 87, 623–649.

Park, W.H. (2008) *Ecological Inference and aggregate Analysis of Elections*, PhD Disserttion, University of Michigan.

Peleg, B. (1966) "On the Kernel of Constant Sum Simple Games with Homogeneous Weights", *Illinois Journal of Mathematics*, 10, 39-48.

Peleg, B. (1966) "The kernel of the general-sum four-person game", *Canadian Journal of Mathematics*, 18, 673–677

Peleg, B. (1967) "Existence theorem for the bargaining set $\mathcal{M}_1^{(i)}$", in Shubik, M. (ed) Essays in Mathematical Economics in Honour of Oskar Morgenstern, Princeton University Press,Princeton, 53–56.

Peleg, B. (1968) "On Weights of Constant-Sum Majority Games", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16, 527-532.

Peleg, B. (1980) "A Theory of Coalition Formation in Committees", *Journal of Mathematical Economics*, 7, 1980, 115-134.

Peleg, B. (1981) "Coalition Formation in Simple games with Dominant Players", *International Journal of Game Theory*, 10, 1-33.

Peleg, B. and P. Sudhölter (2003) *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Boston, Kluwer Academic Publishers.

Peleg, B. et P. Sudhölter (2005) "On the non-emptiness of the Mas-Colell bargaining set", *Journal of Mathematical Economics*, 41, 1060–1068.

Plott, C.R. (1967) "A Notion of Equilibrium and its Possibility under Majority Rule", *American Economic Review*, 57, 787-806.

Poole, K.T. (2005) *Spatial Models of parlamentary Voting*, Cambridge University Press.

Poole, K.T. and H. Rosenthal. (2008) *Ideology and Congress*, Library of Congress.

Pukelsheim, F. (2014), *Proportional Representation*, Springer, Heidelberg.

Rapoport, Am. and Weg, E. (1986). 'Dominated, Connected and Tight Coalitions in the Israeli Knesset', *American Journal of Political Science*, 30, 577-597.

Riker, W.H. (1962) *The Theory of Political Coalitions*, Yale University Press, New Haven, CN.

Riker, W.H. (1967) "Bargaining in a Three-Person Game", *American Political Science Review*, 61, 642-656.

Rosenthal, H. (1968a) "Political Coalitions: Elements of a Model and the Study of French Legislative Elections" in Calcul et Formalisation dans les Sciences de l'Homme. Proceedings of Rome UNESCO conference on mathematical methods in the social sciences. Paris: Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, 270-282.

Rosenthal, H. (1968b) "Voting and Coalition Models in Election Simulations." In Simulation and the Study of Politics, W. M. Coplin (Ed) Chicago: Markham Press, 237-287.

Rosenthal, H. (1970) "Size of Coalition and Electoral Outcomes in the Fourth French Republic." in C. Cotter (ed),The Study of Political Coalitions. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Rosenthal, H. (1975) "Viability, Preferences and Coalitions in the French Election of 1951", *Public Choice*, 20, 27-39.

Rosenthal, R.W. (1972) "Cooperative Games in Effectiveness Form", *Journal of Economic Theory*, 5, 88–101.

Roth, A.E. et U.G. Rothblum (1982) "Risk Aversion and Nash's Solution for Bargaining Games with Risky Outcomes", *Econometrica*, 50, 639-647.

Saari, D. (1997) "The Generic Existence of a Core for q-Rules", *Economic Theory*, 9, 219-260.

Safra, Z., Zhou, L. et I. Zilcha (1990) "Risk Aversion in the Nash Bargaining Problem with Risky Outcomes and Risky Disagreement Points", *Econometrica*, 58, 961-965.

Shepsle, K.A. (1974) ”On the Size of Winning Coalitions”, *American Political Science Review*, 68, 505-518.

Schofield, N. (1976) ”The Kernel and Payoffs on European Government Coalitions”, *Public Choice*, 31, 29-49.

Schofield, N. (1978) ”Generalised Bargaining Sets for Cooperative Games”, *International Journal of Game Theory*, 7, I83-99.

Schofield, N. (1982) ”Bargaining Set Theory and Stability in Coalition Governments”, *Mathematical Social Sciences*, 3, 9-31.

Schofield, N. (1987) ”Bargaining in Voting Majority Voting Games”, in *The Logic of Multiparty Systems*, M.J. Holler (Ed), Martinus Nijhoff Publishers.

Schofield, N. (1995), ”Coalition Politics: A Formal Model and Empirical Analysis”, *Journal of Theoretical Politics*, 7, 245-281.

Schofield, N. (1996) ”The Heart of a Polity”, Chapitre 8 dans *Collective Decision-Making: Social Choice and Political Economy*, Schofield, N. (Ed), Kluwer Academic Publishers.

Schofield, N. (1999) ”The Heart and the Uncovered Set” , *Journal of Economics: Zeitschrift furNationalokonomie*, 8, 79-113.

Schofield, N. (2008) *The Spatial Model of Politics*, Routledge.

Schofield, N. and M. Laver (1985) ”Bargaining Theory and Portfolio Payoffs in European Coalition Governments 1945-83”, *British Journal of Political Science*, 15, 143-164.

Schmeidler, D. (1969) ”The Nucleolus of a Characteristic Function Game”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.

Shapley, L.S. (1953) ”A value for N-person Games” in *Contributions to the Theory of Games,* Vol II, H. Kuhn and A.W. Tucker (Eds), Princeton University press, Princeton, NJ.

Shapley, L.S. (1962) “Simple Games: An Outline of the Descriptive Theory”, *Behavioral Sciences*, 7, 59-66.

Shapley, L.S. (1967) ”On balanced sets and cores”, *Naval Research Logistics Quarterly*, 14, 453-460.

Shapley, L.S. and M. Shubik (1954) ”A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System”, *American Political Science Review*, 48, 787-792.

Snyder, J. M., M. M. Ting, and S.Ansolabehere (2005) “Legislative Bargaining Under Weighted Voting”, *American Economic Review*, 95, 981-1004.

Solymosi T (1999) ”On the bargaining set, kernel and core of superadditive games”, *International Journal of Game Theory*, 28, 229–240.

Solymosi, T. (2002) ”The bargaining set of four-person balanced games”, *International Journal of Game Theory*, 31,1–11.

Suijs, J. et P. Borm (1999) ”Stochastic Cooperative Games: Superadditivity, Convexity and Certainty Equivalents”, *Games and Economic Behavior*, 27, 331-345.

Suijs, J., P. Borm, P., A.De Waegenaere et S. Tijs (1999) ”Cooperative Games with Stochastic payoffs”, *European Journal of Operational Research*, 113, 193-205.

Stearns, R.E. (1968) ”Convergent Transfer Schemes for N-Person Games”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 134, 449-459.

Strom, K. (1990) *Minority Government and majority Rule*, Cambridge University Press, Cambridge.

Taylor, M. (1972) "On the Theory of Government Coalition Formation", *British Journal of Political Science*, 2, 1-73.

Taylor, M. and M. Laver, (1973) "Government Coalitions in Western Europe", *European Journal of Political Research*, 1, 205-48.

Taylor, A.D. and W.S. Zwicker (1999) *Simple Games*, Princeton University Press.

Tchantcho, H., Moyouwou, I. et N. Andjiga " On the Bargaining Set of Three-Player Games", *Economics Bulletin*, 2012, Vol. 32 No. 1 pp. 429-436

Thrall, R.M. and W.F. Lucas (1963) "N-Person Games In Partition Function Form", *Navals Research Logistics Quarterly*, 10, 281-298.

Van Deemen, A.M.A. (1989) "Dominant players and minimum size coalitions, *European Journal of Political Research*, 17, 313-332.

Van Deemen, A.M.A. (1997) *Coalition Formation and Social Choice*, Springer, Heidelberg.

Vohra, R. (1991) "An existence theorem for a bargaining set", *Journal of Mathematical Economics*, 20,19-34.

Warwick, P.V. and J.N. Druckman (2001) "Portfolio Salience and the Proportionality of Payoffs in Coalition Governments", *British Journal of Political Science* 31, 627-649.

Warwick, P.V. et J.N. Druckman (2006) "The Portfolio Allocation Paradox: An Investigation into the Nature of a Very Strong but Puzzling Relationship", *European Journal of Political Science*, 45, 635–665.

Wilson, R. (1971) "Stable Coalition Proposals in Majority-Rule Voting," *Journal of Economic Theory*, 3, 254-271.

Von Neumann, J. and O. Morgenstern. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.

Zhou, L. (1994) "A New Bargaining Set of an N-Person Game and Endogenous Coalition Formation", *Games and Economic Behavior*, 6, 512-526.

7 Appendices

7.1 Appendice 1 : Jeux Coopératifs : Définition, Nucléole, Ensemble de Marchandage, Noyau et Valeur de Shapley[102]

7.1.1 Jeux coopératifs TU et NTU: Définitions

Un *jeu coopératif à utilité transférable* (TU) est une paire (N, V), où $N = \{1, \ldots, n\}$ avec $n \geq 2$ est un ensemble fini de joueurs et V est une fonction qui associe un nombre réel $V(S)$ à chaque sous-ensemble S de N. Il est supposé que $V(\varnothing) = 0$. La fonction V est appelée *fonction caractéristique du jeu*; on dit parfois que le jeu est sous *forme caractéristique*.

Il est *normalisé* si $V(\{i\}) = 0$ pour tout $i \in N$.

[102]On pourra consulter Peleg et Sudhölter (2003) pour un exposé approfondi de la théorie des jeux coopératifs. Keiding (2015), Maschler, Solan et Zamir (2013), Myerson (1991), Osborne et Rubinstein (1994) et Owen (2001) consacrent de nombreux chapitres à cette théorie et ses appplications. En langue française, le lecteur pourra consulter la partie 3 de Dequiedt, Durieu et Solal (2011).

Il est *suradditif* si $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$ pour tout $S, T \subseteq N$ tels que $S \cap T = \varnothing$. Il est *faiblement suradditif* si $V(S \cup \{i\}) \geq V(S) + V(\{i\})$ pour tout $S \subseteq N$ et $i \notin S$. Il est *convexe* si $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T) - V(S \cap T)$ pour tout $S, T \subseteq N$.

Nous noterons

$$X_{IR} \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = V(N),\ y_j \geq V(\{j\})\ \ \forall j \in N \right\}$$

l'ensemble des partages réalisables efficaces qui sont individuellement rationnels. Ces vecteurs sont appelés *imputations*[103]. Une imputation est un partage où chaque joueur reçoit au moins ce qu'il peut obtenir seul s'il ne noue aucune alliance. Dans le contexte de distribution des portefeuilles ministériels, un arrangement $x \in X_{IR}$ est ainsi une répartition des sièges dans la grande coalition qui respecte le pouvoir des joueurs pris isolément.

Une structure de coalitions (Aumann et Drèze (1974)) est une partition $\pi = \left\{S^1, S^2, ..., S^K\right\}$ de N. L'ensemble des imputations s'écrit dans ce cas:

$$X_{IR}^{\pi} \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in S^k} y_i = V(S^k)\ \forall k = 1, ..., K \text{ et } y_j \geq V(\{j\})\ \ \forall j \in N \right\}$$

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, il sera implicitement supposé que $\pi = \{N\}$.

Un *jeu coopératif à utilité non transférable* (NTU) est une paire (N, V), où $N = \{1, \ldots, n\}$ avec $n \geq 2$ est un ensemble fini de joueurs et V est une fonction qui associe un sous-ensemble non vide fermé et compréhensif $V(S) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ à chaque sous-ensemble S de N. Il est supposé que $V(S) \cap \left(x^S + \mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}\right)$ est borné pour tout $x^S \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}$.[104]

Un jeu NTU est *suradditif* si $V(S \cup T) \supseteq V(S) \times V(T)$ pour tout $S, T \subseteq N$ tels que $S \cap T = \varnothing$.

Dans le cas où le jeu procède d'une description où pour chaque joueur $i = 1, ..., n$, les stratégies pures individuelles X_i de ce joueur ainsi que son utilité $U_i : \prod_{j=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ pour chaque profil de stratégies sont définies, $V(S)$ décrit les vecteurs d'utilité que les joueurs de S peuvent se garantir lorsqu'ils coordonnent leurs stratégies individuelles[105]. Précisément :

$$V(S) = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \text{pour tout } i \in S : u_i \leq u_i(x_S) \text{ pour un } x_S \in \prod_{j \in S} X_j \right\}$$

où $u_i(x_S) \equiv \underset{x_{N \backslash S} \in \prod_{j \in N \backslash S} X_j}{Inf} U_i(x_S, x_{N \backslash S})$. A chaque stratégie coordonnée x_S de S et à chaque réponse $x_{N \backslash S}$ de la coalition complémentaire $N \backslash S$ correspond un vecteur d'utilités $\left(U_i(x_S, x_{N \backslash S})\right)_{i \in S}$

[103]Lorsque la condition de rationalité individuelle n'est pas intégrée, on parle de *préimputation*.

[104]Cette définition est celle de Peleg et Sudhölter (2003). Les définitions varient parfois sensiblement selon les auteurs. Par exemple, certains auteurs incluent la convexité de $V(S)$ dans la définition. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 11 de Peleg et Sudhölter (2003) pour plus d'informations sur ces questions.

[105]Dans certains manuels, $V(S)$ est défini comme un sous-ensemble $\widehat{V}(S)$ de $\mathbb{R}^n$. On passe de l'un à l'autre en posant (voir par exemple Keiding (2015)): $\widehat{V}(S) = V(S) \times \mathbb{R}^{N \backslash S}$.

pour les joueurs de S. Sachant que S ne contrôle pas $x_{N\backslash S}$, S ne peut écarter le scénario le pire pour le joueur i, c'est à dire $\underset{x_{N\backslash S}\in \prod_{j\in N\backslash S} X_j}{Inf} U_i(x_S, x_{N\backslash S})$. Il s'agit donc d'une version très prudente de la mesure des possibilités d'une coalition appelée version alpha. Les niveaux inférieurs à ces niveaux de référence sont également inclus dans $V(S)$. On peut enfin revoir la définition ci-dessus en considérant les stratégies mixtes sur les stratégies jointes des membres de S. En notant U l'ensemble des vecteurs d'utilité $U(x) = (U_1(x), ..., U_n(x))$ attachés aux différents profils de strategies x, on peut définir une relation de dominance $\succ_V$ sur U par $u \succ_V u'$ si $\exists S \subseteq N : u \in V(S)$ et $u_i > u'_i$ pour tout $i \in S$.[106]

Puique l'essentiel des jeux étudiés dans cet article seront des jeux TU, notre présentation des solutions sera limitée aux jeux TU, à l'exception de la fin de l'appendice 2 consacrée au coeur des jeux de vote.

Pour terminer, il est aussi utile de préciser qu'un jeu coopératif peut être représenté plus généralement à l'aide d'une fonction appelée *fonction de partition* (Rosenthal (1972), Thrall et Lucas (1963)). Une fonction de partition est une fonction $\widetilde{V}$ qui pour tout $1 \leq k \leq n$, associe à toute partition de $\pi = \left\{S^1, S^2, ..., S^k\right\}$ de N en k coalitions, un vecteur $\left(\widetilde{V}\left(S^1, \pi\right), \widetilde{V}\left(S^2, \pi\right), ..., \widetilde{V}\left(S^k, \pi\right)\right)$: Pour tout $j = 1, ..., k$, la valeur de la coalition S^j dépend de la structure π toute entiere et non seulement de S^j. Cette forme plus générale que la fonction caractéristique permet de prendre en compte des *externalités* (négatives ou positives) entre coalitions. Lorsqu'on part d'une fonction de partition $\widetilde{V}$, il y a de muliples façons de lui asssocier une fonction caractéristique. Dans notre article, nous supposerons (forme alpha) que :

$$V(S) = \underset{\pi\in\Pi(N|S)}{Inf} \widetilde{V}\left(S, \pi\right)$$

où $\Pi\left(N \mid S\right)$ désigne l'ensemble des partitions de N qui contiennent S.

7.1.2 Nucléole, Coeur et Moindre Coeur

Pour toute imputation $x \in X_{IR}$ on calcule $\theta(x)$ le vecteur de dimension 2^n dont les coordonnées sont les nombres

$$e(S, x) \equiv V(S) - \sum_{i\in S} x_i$$

pour $\emptyset \subseteq S \subseteq$N ordonnés des plus grands vers les plus petits (c'est à dire, $\theta^i(x) \geq \theta^j(x)$ for $1 \leq i \leq j \leq 2^n$). Le nombre $e(S, x)$ est appelé *l'excès de la coalition S* : plus ce nombre est élevé, plus la coalition S a lieu d'être mécontente du partage reflété par x. En effet ce nombre mesure l'écart entre ce à quoi pourrait aspirer (voire se garantir) cette coalition compte tenu de ses forces et ce qui lui est proposé au travers de x. Plus ce nombre est élevé, plus il est à prévoir que la coalition S sera mécontente de la proposition x. La coalition la

[106]Sur ces questions, le lecteur pourra consulter les chapitres 7 et 8 de Ordeshook (1986) où il trouvera des exemples illustratifs ou Peleg et Sudhölter (2003) pour un exposé des fondements théoriques de cette construction et des principaux résultats.

plus plaintive contre x sera, avec la notation qui précède, la première coordonnée du vecteur $\theta(x)$.

On peut très bien imaginer une négociation où les négociateurs examinent prioritairement les coalitions les plus plaintives et l'amplitude de leur plainte. Dans cette logique, l'attention devrait donc dans un premier temps porter sur la minimisation des plaintes les plus criantes et ne retenir que les arrangements passant avec succès le premier test. Cet ensemble est appelé le *moindre coeur*[107] du jeu V. Formellement, le *Moindre Coeur* de (N, V), noté $LC(N, V)$, est l'intersection de tous les $\epsilon-$ *core* non vides de (N, V), où, étant donné un nombre réel ϵ, le $\epsilon-$ *core* de (N, V) est l'ensemble:

$$C_\epsilon \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = V(N) \text{ et } e(S, x) \leq \epsilon \text{ pour tout } \varnothing \subsetneqq S \subsetneqq N \right\}.$$

La notion de Moindre Coeur a été introduite par Maschler, Peleg et Shapley (1979). Si (N, V) est suradditif, alors $LC(N, V) \subseteq X_{IR}$. Cet ensemble peut contenir plusieurs partages. Comment trancher parmi ces éléments du Moindre Coeur ?

En suivant cette logique, on peut examiner les plaintes les plus criantes en descendant d'un cran dans l'échelle des plaintes c'est à dire en considérant les plaintes les plus criantes résiduelles une fois éliminées celles qui sont les plus criantes. On construit ainsi un nouvel ensemble contenu dans le précédent et on peut continuer d'appliquer ainsi cette logique lexicographique. Le *nucléole*[108] de (N, V) est l'unique vecteur $Nu(N, V) = x^* \in X_{IR}$ tel que $\theta(x^*)$ est minimal, au sens de l'ordre lexicographique dans l'ensemble $\{\theta(y) \mid y \in X_{IR}\}$.[109] Le nucléole résulte donc d'une négociation où les négociateurs sont attentifs aux plaintes les plus sévères et partagent implicitement la vue selon laquelle ces plaintes doivent être prises en considération en premier dans l'ordre des priorités. D'une certaine manière, les négociateurs, tout en faisant prévaloir leur pouvoir, ne sont pas dépourvus d'un certain sens égalitaire (de type Rawlsien ici). Le calcul du nucléole est compliqué. A ce jour l'article de référence reste encore Kopelowitz (1967) qui transforme ce calcul en une séquence fnie de programmes linéaires. Il a utilisé son algortithme pour clculer le nucléole de nombreux jeux majoritaires pondérés de somme nulle avec 6 ou 7 joueurs.

Naturellement, on aimerait mieux qu'aucune plainte ne soit enregistrée contre un partage. L'ensemble de tels partages constitue ce que l'on appelle le *coeur*[110] du jeu V. Une famille de

[107] *Least Core* en anglais.

[108] *Nucleolus* en anglais.

[109] Le nucléole est défini ici par rapport à X_{IR} mais il peut être défini par rapport à un sous-ensemble compact et convexe X quelconque de $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Pour tout $x \in X$, on note aussi $\theta(x)$ le vecteur de dimension 2^n dont les coordonnées sont les nombres $e(S, x) \equiv V(S) - \sum_{i \in S} x_i$ pour $\emptyset \subseteq S \subseteq N$, ordonnés des plus grands vers les plus petits. Le *nucléole de* (N, V) *par rapport à* X est l'unique (pour une preuve de l'unicité, on pourra consulter Peleg and Sudhölter (2003)) vecteur $x^* = Nu(N, V) \in X$ tel que $\theta(x^*)$ est minimal, au sens de l'ordre lexicographique dans l'ensemble $\{\theta(y) \mid y \in X\}$. Le nucléole de (N, V) par rapport à X_{IR} est le nucléole tel qu'il a été défini originellement par Schmeidler (1969).

[110] *Core* en anglais. Notons qu'alternativement, le coeur du jeu V peut etre défini comme l'ensemble des imputations non dominées au sens de la relation de dominance $\succ_V$.

coalitions$\{S^1, S^2, ..., S^K\}$ de N est dite *équilibrée* s'il existe un vecteur $\delta = \{\delta^1, \delta^2, ..., \delta^K\}$ dans $\mathbb{R}_+^K$ tel que:

$$\sum_{k:i\in S^k} \delta^k = 1 \text{ pour tout } i \in N$$

Un jeu TU (N, V) est *équilibré* si pour tout vecteur δ décrivant une famille de coalitions équilibrée:

$$\sum_{k=1}^{K} \delta^k V(S^k) \leq V(N)$$

Le théorème de Bondareva-Shapley (Bondareva (1963), Shapley (1967)[111] énonce qu'un jeu a un coeur non vide ssi il est équilibré. Si le coeur est non vide, le nucléole choisira alors un partage dans le coeur : plutôt que de minimiser la plainte la plus sévère, il s'occupera de maximiser le gain le plus modeste. Hélas, dans de nombreux jeux, le coeur est vide et il n'est pas possible d'éviter les plaintes, ce qui fait du nucléole une solution attractive.

7.1.3 L'Ensemble de Marchandage

Cette logique de négociation basée sur les plaintes apparaît aussi dans un autre ensemble important de la théorie des jeux coopératifs appelé *ensemble de marchandage*[112] introduit par Aumann et Maschler (1964) et Davis et Maschler (1963,1967).

Dans la suite, étant donné deux négociateurs i et j dans N, nous noterons N_{ij} l'ensemble des coalitions $S \subseteq N$ telles que $i \in S$ et $j \notin S$. Soit $x \in X_{IR}$ un partage proposé comme arrangement.

On dira que i a une *objection* contre j et le partage x si il existe un autre partage y et une coalition $S \in N_{ij}$ telle que $e(S, y) = 0$ et $y_k > x_k$ pour tout $k \in S$. Le négociateur i brandit la menace de quitter la table en pointant du doigt le négociateur j sur la base du fait qu'il existe une coalition S ne contenant pas j et pouvant garantir à ses membres (si la menace est mise à exécution) un partage unanimement préféré à celui qui est proposé[113].

Le négociateur j peut-il réagir à cette attaque avec une certaine légitimité ? Une *contre-objection* de j à l'encontre de l'objection (S, y) formulée par i contre j est une paire (T, z) où $T \in N_{ji}$ et $T \cap S \neq \varnothing$ et z vérifie $e(T, z) = 0$, $z_k \geq x_k$ pour tout $k \in T$ et $z_k \geq y_k$ pour tout $k \in S \cap T$. En d'autres termes, j contre attaque en argumentant qu'il pourrait lui aussi quitter la table en conservant, ainsi que ses partenaires dans T, sa part x (sans son concours car $i \notin T$) et en garantissant aux membres de S qu'ils solliciteraient tous deux un traitement au moins aussi bon que celui qui est offert par i dans son objection.

L'*ensemble de marchandage* de (N, V) est l'ensemble $B_1(V)$ des partages x tels que pour toute paire de joueurs i et j, il existe une contre-objection en réponse à toute objection

[111] Voir le chapitre 3 de Peleg et Sudhölter (2003).
[112] *Bargaining Set* en Anglais.
[113] De façon équivalente, on peut définir une objection par des inégalités larges et une inégalité stricte pour i (Voir Peleg et Sudhölter (2003)).

éventuelle de i contre x et j. Il qualifie en quelque sorte la force de dissuasion. Peleg (1963) a démontré que dès l'instant où $X_{IR} \neq \varnothing$, l'ensemble de marchandage est non vide. Une objection de i contre j à propos du partage x est dite justifiée si le joueur ne peut pas contre-objecter. Dans ce cas on note: $iP(x)j$. On définit ainsi une relation binaire sur l'ensemble des joueurs N.

La structure de l'ensemble de marchandage est compliquée. Maschler (1966) a démontré que l'ensemble de marchandage peut s'exprimer comme une union finie de polyèdres compacts et convexes. Cela ne signifie nullement qu'il soit facile de calculer en général l'ensemble de marchandage. Une première raison à celà est que pour écrire ces inégalités, il faut connaître les familles équilibrées minimales de coalitions de $n-1$ joueurs. De plus, le nombre de calculs devient vite énorme quand le nombre de joueurs augmente. Par exemple, lorsque $n = 4$, on doit en principe examiner 150^{12} systèmes comportant chacun 41 inégalités. En principe seulement car certains de ces systèmes n'ont pas de solutions ou ont des solutions déjà données par d'autres sytèmes. Mais ces simplifications ne sont pas faciles à détecter. On peut noter en revanche qu'il prend peu de temps pour vérifier qu'une imputation donnée est dans l'ensemble de marchandage : il y a 197 inégalités à examiner. Notons cependant que l'ensemble de marchandage est identifié lorsque $n = 3$ et $n = 4$. Dans tout jeu où les seules coalitions ayant de la valeur sont les coalitions de taille 1, $n - 1$ et n (ce qui est trivialement le cas lorsque $n = 3$), l'ensemble de marchandage coïncide avec le coeur lorsque celui-ci est non vide et dégénère sur un point unique lorsque le coeur est vide. Brune (1976) et Solimayi (2002) ont aussi montré que dans le cas où $n = 4$, si le coeur est non vide, alors l'ensemble de marchandage coïncide avec le coeur. Cette coïncidence n'est plus valide en général lorsque $n \geq 5$. Signalons cependant qu'il y a coïncidence lorsque V est convexe.

L'ensemble de marchandage défini ci-dessus est basé sur des objections et contre-objections individuelles et suppose (implicitement) qu'il n'existe aucune structure préalable de coalitions). C'est l'ensemble de marchandage que nous utiliserons dans la section 2.

Lorsqu'il existe une structure de coalitions π, les seules objections prises en considération sont celles émanant d'un membre d'une coalition π de contre un membre appartenant à la même coalition. En particulier dans le cas où $\pi = M \cup \{i\}_{i \in N \setminus M}$, c'est à dire le cas où il existe une coalition de joueurs à côté de joueurs isolés, les seules objections sont celles émanant d'un joueur de M contre un joueur de M. Notons cependant que les objections et contre-objections peuvent impliquer des joueurs hors de M.

S'agissant de l'ensemble de marchandage lui même (c'est à dire quelle que soit la structure de coalitions considérée), il lui est souvent reproché de contenir des solutions contre-intuitives. En réponse à ces critiques, plusieurs pistes peuvent être explorées. Notons que rien n'interdit de revoir la définition en prenant en contre des objections et contre-objections émanant de coalitions. L'adaptation des deux définitions ci-dessus est suffisamment claire pour ne pas être reproduite ici (N_{ij} est remplacé par $N_{ST} = \{R \subseteq N : R \supseteq S$ et $R \cap T = \emptyset\}$ où S et T désignent deux coalitions disjointes. Une objection de S contre T pour le partage x fait intervenir une imputation y et une coalition $R \in N_{ST}$ et une contre-objection de T contre S (si elle existe) fait intervenir un partage z et une coalition $U \in N_{TS}$. On définit comme ci-dessus une relation $P(x)$ sur les coalitions disjointes: $SP(x)T$ où $S \cap T = \varnothing$ indique que S a une objection justifiée contre T à l'occasion du partage x. Cette extension aux coalitions apparaît déjà chez Aumann et Maschler[114]. Nous allons ici examiner une extension de cette nature due à Schofield ((1978), (1982), 1987)). Cette extension est utilisée dans la section 2 et dans l'appendice 4.

Comme Schofield, nous allons la présenter dans le cadre d'une structure de coalitions $\pi = M \cup \{i\}_{i \in N \setminus M}$: un partage est donc ici un vecteur $x \in \mathbb{R}^M$ tel que $\sum_{i \in M} x_i = V(M)$ et $x_j \geq V(\{i\})\ \forall i \in N$. Schofield definit l'ensemble de marchandage $B_2(M, V)$ comme suit. Tout d'abord, pour tout $i \in M$ and toute coalition $T \subseteq M \setminus \{i\}$, il note $iP_2(x)T$ le fait que i a une objection justifiée contre T et $iP_2(x)j$ le fait que i a une objection justifiée contre une coalition T contenant j; dans ses travaux il note $P_1(x)$ le relation binaire notée $P(x)$ plus haut. L'ensemble $B_2(M, V)$ est l'ensemble: $\{x \in X^{\pi}_{IR} : iP_2(x)j$ pour aucun $i, j \in M\}$. Par construction l'ensemble $B_2(M, V)$ est contenu dans l'ensemble de marchandage conventionnel. Il s'agit donc d'une sélection possiblement pertinente. Malheureusement comme nous le verrons dans la section 2 au travers d'exemples, il peut être vide. C'est cette dernière raison qui a conduit Schofield à proposer un autre ensemble de marchandage qu'il note $B_*(M, V)$. Pour un partage $x \in X^{\pi}_{IR}$, il définit $iP_*(x)j$ par $iP(x)S$ avec $j \in S \subseteq M \setminus \{i\}$ et il n'existe pas $i \in T \subseteq M \setminus \{j\}$ tel que $S \cap T \neq \emptyset$ et $jP(x)T$. L'ensemble $B_*(M, V)$ est[115] l'ensemble : $\{x \in X^{\pi}_{IR} : iP_*(x)j$ pour aucun $i, j \in M\}$. Par construction :

$$B_2(M, V) \subseteq B_*(M, V) \subseteq B_1(M, V)$$

Dans le cas de $B_*(M, V)$, une objection a priori justifiée de i contre j englobant un groupe S est annulée dès l'instant où j a lui aussi une objection justifiée contre i englobant une coalition T contenant un membre de S. Schofield a démontré que $B_*(M, V)$ est non vide. Nous verrons dans la section 2 et l'appendice 4 que $B_*(M, V)$ peut être un sous-ensemble propre de $B_1(M, V)$ et exclure, ce faisant, des imputations contre-intuitives dans $B_1(M, V)$.

Ces développements n'épuisent pas le sujet car d'autres définitions de la notion de contre-objection peuvent etre envisagées. Schofield lui-même suggère une version forte de le la contre-objection, à la fois pour $B_1(M, V)$ et $B_2(M, V)$, en demandant que toutes les inégalités concernant $S \cap T$ soient strictes. Ce faisant, il devient plus difficile de formuler une contre-objection et le nouvel ensemble de marchandage est en conséquence plus petit. L'ensemble de marchandage de Mas-Colell (1989) procède de la même veine. Il définit les objections et les contre-objections en considérant des inégalités larges avec une inégalité stricte au moins (sans demander cependant que l'inégalité stricte s'applique à l'un des joueurs de $S \cap T$). Il devient plus difficile de formuler des contre-objections mais l'ensemble de marchandage de Mas-Colell est cependant non vide sous des conditions assez faibles de sur-additivité (Vohra (1991)).

Une dernière suggestion fort interessante et (à notre connaissance) encore assez peu étudiée est due à Zhou (1994). Zhou définit une objection à la structure de coalition π et au partage $x \in X^{\pi}_{IR}$ comme une combinaison (y, S) telle que $\sum_{i \in S} y_i \leq V(S)$ et $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$. Dans cette définition, il n'est pas dit que l'objection émane d'un individu ou même d'un sous-groupe particulier de S : tous les membres de S sont en quelque sorte

[114]On pourra aussi consulter Owen (2001).

[115]Modulo la fermeture "topologique" de certains ensembles.

solidaires dans la formulation de l'objection. Par ailleurs, on part ici d'une structure de coalition quelconque et la structure de coalition devient elle même une inconnue du problème. Il définit une contre-objection à l'objection (y, S) par une paire (z, T) telle que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in T} z_i &\leq V(S) \\
T \backslash S &\neq \varnothing, S \backslash T \neq \varnothing \text{ et } S \cap T \neq \varnothing \\
z_k &\geq x_k \text{ pour tout } k \in T \backslash S \text{ et } z_k \geq y_k \text{ pour tout } k \in S \backslash T
\end{aligned}$$

La contre-objection émane d'un groupe qui se sent attaqué par l'objection de S. Attaqué dans quel sens ? La seconde condition implique que la contre-objection ne peut pas émaner: (1) d'un groupe contenant tous les membres de S, ou (2) d'un groupe contenu dans S ou (3) d'un groupe ne comportant aucun membre de S. Une objection est justifiée si elle ne fait l'objet d'aucune contre-objection. Zhou insiste à juste titre sur l'importance de la seconde condition. Une paire (π, x) où $x \in X_{IR}^{\pi}$ est dans l'ensemble de marchandage s'il n'existe aucune objection justifiée contre x. Zhou démontre que son ensemble de marchandage est toujours non vide.

Il insiste sur plusieurs aspects de son concept d'ensemble de marchandage. Contrairement à l'ensemble de marchandage conventionnel, la structure de coalition n'est pas fixée : certaines structures de coalition peuvent être écartées par la logique du marchandage. On note tout d'abord que les partages dans l'ensemble de marchandage sont individuellement rationnels et ont de bonnes propriétés d'efficacité. En fait lorsque le jeu est suradditif la seule structure de coalition concevable est la grande coalition.

Par ailleurs, il écarte un aspect stratégique de la définition conventionnelle découlant du ciblage dans la définition d'une objection. L'exemple suivant adapté[116] de l'exemple 3.1. de Zhou illustre la différence. Supposons $N = \{1, 2, 3, 4\}$ et :

$$V(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } |S| = 1 \\ 3.2 \text{ si } S = \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \\ 2 \text{ si } S = \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\} \\ 4.2 \text{ si } S = \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\} \\ 4.3 \text{ si } S = \{2,3,4\} \\ 6 \text{ si } S = \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

Le partage $x = (1.5, 1.5, 1.5, 1.5)$ n'est pas dans l'ensemble de marchandage conventionnel[117]. Le joueur 2 trouve que le joueur 1 est trop bien servi et objecte via la paire $\{2, 3\}$. Il pourrait le faire via la paire $\{2, 4\}$. Dans les deux cas, il peut trouver un vecteur y tel que $y_2 > 1.5$ et $y_i \geq 1.5$ pour $i = 3$ ou $i = 4$ et $y_2 + y_i \leq 3.2$. (En revanche, 2 ne peut pas objecter contre x en faisant intervenir à la fois 3 et 4 car $4.5 < 4.3$.) Cette objection est justifiée car 1 n'a aucune contre-objection. Puisqu'il doit prétendre pouvoir s'assurer 1.5, il ne peut s'allier avec 3 ou 4 ($2 < 3$) et il ne peut s'allier avec 3 et 4 car $4.2 < 4.5$. En revanche, x est dans l'ensemble de marchandage de Zhou. En effet une objection à x ne peut venir que

[116] Contrairement à Zhou, je jeu dans notre example est sur-additif.

[117] Pour $\pi = \{N\}$, tout partage x dans l'ensemble de marchandage conventionnel vérifie: $x_1 = 1$.

$\{2,3\}, \{2,4\}$ ou $\{3,4\}$. Considérons le premier cas. Dans ce cas quel que soit le vecteur y, soit 2, soit 3 aura au plus 2.7. Supposons que ce soit 2. En s'associant avec 2, 4 peut proposer le partage z avec $z_2 = 2.7$ et $z_4 = 2.5$. L'objection $(y, \{2,3\})$ n'est donc pas justifiée ! dans cet exemple on mesure bien la différence entre les différentes définitions d'une contre-objection. Chez Zhou, tous les joueurs qui ne sont pas dans la coalition formulant l'objection sont a priori concernés et en position de formuler une contre-objection. Aucun joueur n'est ciblé en particulier qui obligerait ce joueur à faire necessairement partie de la coalition formulant la contre-objection.

Un autre point important sur lequel insiste Zhou est le fait que la coalition T portant la contre-objection doit avoir une intersection non vide avec la coalition S qui objecte. Considérons l'exemple $N = \{1,2,3,4,5\}$ et :

$$V(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } |S| = 1 \\ 4.1 \text{ si } S = \{1,2\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{3,5\} \\ 10 \text{ si } S = \{1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

et $V(S)$ défini par enveloppe suradditive[118] pour les cas restants. Pour ce qui concerne l'ensemble de marchandage de Zhou, tout partage x donnant moins de 4.1 au total à la coalition $\{1,2\}$ fera l'objet d'une objection justifiée par $\{1,2\}$. En effet toute coalition T comprenant au moins 1 ou 2 ne pourra pas formuler une contre-objection. En revanche, l'ensemble de marchandage conventionnel pour la structure de coalition $\pi = \{N\}$ contient de nombreux partages qui violent cette condition : par exemple le partage égalitaire $x = (2,2,2,2,2)$ fait partie de cet ensemble. Les objections ne peuvent venir que de paires. Clairement, 1 n'a aucune objection justifiée contre 2. Et toute objection contre l'un des autres joueurs ne peut émaner que de la coalition $\{1,2\}$. Il est immédiat qu'elle peut faire l'objet d'une contre-objection par une coalition ne contenant ni 1 ni 2. Le même raisonnement s'applique à 2. Considérons maintenant le joueur 3. Il ne peut formuler une objection qu'avec 4 ou 5 (mais pas les deux ensemble). Supposons qu'il objecte avec 4. Dans ce cas, le joueur 5 peut débaucher 4 (4 a au plus $2.1 - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$) en luis proposant $2.1 - \frac{\epsilon}{2}$.

D'autres conceptions alternatives de l'ensemble de marchandage ont été proposées par exemple par Dutta, Ray, Sengupta and Vohra (1989) et Grennberg (1990). A notre connaissance, à l'exception du cas convexe, il existe peu de travaux proposant un calcul de ces ensembles. Même la classe des jeux simples reste largement inexplorée. On peut citer cependant Einy et Wettstein (1996) qui étudient l'équivalence de ces ensembles avec le coeur dans le cas de jeux simples avec des joueurs diposant d'un pouvoir de veto c'est à dire les jeux simples ayant un coeur non vide.

7.1.4 Le Noyau

L'ensemble de marchandage contient en général une multiplicité de partages et l'attention s'est tournée vers celui (ou ceux) qui pouvai(en)t dans ce vaste espace de négociation servir

[118] L'enveloppe suradditive d'un jeu V est le jeu $\widetilde{V}$ défini par $\widetilde{V}(S) = \underset{\pi \in \Pi(S)}{Sup} \sum_{T \in \pi} V(T)$ pour tout $S \subseteq N$ où $\Pi(S)$ désigne l'ensemble des partitions de S.

de, ou être comme considéré(s) comme, des points focaux. Au nombre de ceux-ci figure en bonne place le *noyau* introduit par Davis and Maschler (1963). Le *noyau*[119] du jeu V est l'ensemble $K(V)$ des partages x tels que pour tout $i, j \in N$:

$$s_{ij}(x) \equiv \max_{S \in \mathcal{N}_{ij}} e(S, x) > s_{ji}(x) \equiv \max_{S \in \mathcal{N}_{ji}} e(S, x) \text{ implique } x_j = V(\{j\})$$

Cette définition indique clairement qu'un partage fait partie du noyau dès l'instant (sous réserve que l'on ne bute pas sur les contraintes de rationalité individuelle) où pour chaque paire possible de négociateurs, les plaintes maximales qu'ils peuvent formuler l'un contre l'autre s'équilibrent. Le noyau est un sous-ensemble non vide de l'ensemble de marchandage. Cette solution introduit dans le champ des négociations acceptables des considérations d'égalité mais d'une nature différente de celles qui ont prévalu pour le nucléole. *En fait, pas si éloignées que cela, car le nucléole appartient au noyau et s'identifie donc à lui lorsque ce dernier dégénère sur un seul partage.*

Le noyau a également une structure compliquée. Il peut aussi être exprimé comme l'union finie de polytopes et son calcul est compliqué. Aumann, Peleg et Rabinowitz (1965) offrent cependant de nombreux résultats concernant le calcul du noyau dans le cas des jeux simples définis ci-après. Ces calculs ont permis à Maschler et Peleg (1966,1967) d'analyser plus en profondeur le noyau et de réduire considérablement le système d'inégalités nécessaires pour calculer le noyau.

Kopelowitz (1967) a utilisé ces résultats pour déterminer le noyau de tous les jeux majoritaires pondérés de somme constante avec 7 joueurs ou moins. On a des exemples de jeux où le noyau est l'union de plusieurs polytopes parfois disjoints.

Nous avons mentionné ci-dessus que dans le cas où $n = 3$, si le jeu est faiblement suradditif mais non équilibré (donc avec un coeur vide), l'ensemble de marchandage consiste en un seul vecteur qui est aussi ici le noyau et le nucléole du jeu. Les formules décrivant le nucléole/noyau ont été (re)découvertes par de nombreux auteurs dont Davis et Maschler (1965) et Legros (1981). On démontre qu'il y a 5 régimes possibles. Pour exprimer le nuclèole, on suppose que V a été au préalable normalisée[120] et que (après permutation des joueurs, si nécessaire) $V(\{1,2,3\}) \geq V(\{1,2\}) \geq V(\{1,3\}) \geq V(\{2,3\})$. Les 5 classes et les nucléoles attachés à ces classes sont les suivants :

Classe 1 : $V(\{1,2\}) \leq \frac{1}{3} V(\mathcal{N})$

$$Nu_i(\mathcal{N}, V) = \begin{cases} \frac{V(\mathcal{N})}{3} \text{ si } i = 1, \\ \frac{V(\mathcal{N})}{3} \text{ si } i = 2, \\ \frac{V(\mathcal{N})}{3} \text{ si } i = 3. \end{cases}$$

[119] *Kernel* en Anglais.

[120] Comme la plupart des solutions, le nucléole vérifie la propriété suivante. Soient V un jeu quelconque et W un jeu additif. Alors, $Nu(V + W) = Nu(V) + Nu(W)$. En revanche, contrairement à la valeur de Shapley, cette formule n'est pas vraie (en général) lorsque W est quelconque.

Classe 2 : $\frac{1}{3}V(\{1,2\}) + \frac{2}{3}V(\{1,3\}) \leq \frac{1}{3}V(\mathcal{N}) \leq V(\{1,2\})$

$$Nu_i(\mathcal{N}, V) = \begin{cases} \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,2\})}{4} \text{ si } i = 1, \\ \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,2\})}{4} \text{ si } i = 2, \\ \frac{V(\mathcal{N})-V(\{1,2\})}{2} \text{ si } i = 3. \end{cases}$$

Classe 3 : $\frac{1}{3}V(\{1,2\}) + \frac{2}{3}V(\{2,3\}) \leq \frac{1}{3}V(\mathcal{N}) \leq \frac{1}{3}V(\{1,2\}) + \frac{2}{3}V(\{1,3\})$

$$Nu_i(\mathcal{N}, V) = \begin{cases} \frac{V(\{1,2\})+V(\{1,3\})}{2} \text{ si } i = 1, \\ \frac{V(\mathcal{N})-V(\{1,3\})}{2} \text{ si } i = 2, \\ \frac{V(\mathcal{N})-V(\{1,2\})}{2} \text{ si } i = 3. \end{cases}$$

Classe 4 : $\frac{2}{3}(V(\{1,3\}) + V(\{2,3\})) - \frac{1}{3}V(\{1,2\}) \leq \frac{1}{3}V(\mathcal{N}) \leq \frac{1}{3}V(\{1,2\}) + \frac{2}{3}V(\{2,3\})$

$$Nu_i(\mathcal{N}, V) = \begin{cases} \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,2\})}{4} + \frac{V(\{1,3\})-V(\{2,3\})}{2} \text{ si } i = 1, \\ \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,2\})}{4} + \frac{V(\{2,3\})-V(\{1,3\})}{2} \text{ si } i = 2, \\ \frac{V(\mathcal{N})-V(\{1,2\})}{2} \text{ si } i = 3. \end{cases}$$

Classe 5 : $\frac{1}{3}V(\mathcal{N}) \leq \frac{2}{3}(V(\{1,3\}) + V(\{2,3\})) - \frac{1}{3}V(\{1,2\})$

$$Nu_i(\mathcal{N}, V) = \begin{cases} \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,2\})+V(\{1,3\})-2V(\{2,3\})}{3} \text{ si } i = 1, \\ \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,2\})+V(\{2,3\})-2V(\{1,3\})}{3} \text{ si } i = 2, \\ \frac{V(\mathcal{N})+V(\{1,3\})+V(\{2,3\})-2V(\{1,2\})}{3} \text{ si } i = 3. \end{cases}$$

On vérifiera que le jeu est non vide dans les classes 1, 2, 3 et 4.

7.1.5 La Valeur de Shapley

Il y a plusieurs façons de présenter la valeur de Shapley. Une "histoire" familière (il s'agit en effet plus d'une image que d'un véritable protocole de négociation) à l'appui de cette solution est la suivante. Imaginons que selon un ordre établi, les négociateurs entrent à tour de rôle dans la salle des négociations et obtiennent comme part dans le partage l'accroissement de valeur qui résulte de leur entrée. Considérons le joueur $i \in \mathcal{N}$. Formellement, si la coalition des joueurs entrés avant lui est l'ensemble S, la part qui lui sera allouée sera égale à $V(S \cup \{i\}) - V(S)$. Naturellement, la part reçue par i dépend de sa place dans l'ordre d'arrivée : parfois il peut être préférable d'arrriver tôt et d'autres fois, il faut mieux arriver tardivement. Pour neutraliser cet effet, on peut songer à tirer au sort l'ordre d'entrée. La valeur de Shapley est la moyenne des vecteurs des partage construits selon le principe décrit ci-dessus.

La valeur de Shapley $Sh(V)$ (Shapley (1953)) du jeu V est donc le vecteur $Sh(V)$ défini comme suit :

$$Sh_i(V) = \sum_{S \subseteq \mathcal{N} \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(|\mathcal{N}| - |S| - 1)!}{|\mathcal{N}|!}\,(V(S \cup \{i\}) - V(S))\,.$$

Les propriétés de la valeur de Shapley sont bien connues ainsi que ses multiples interprétations et variantes. On notera en particulier pour la suite que cette solution est linéaire, c'est à dire que si $(\mathcal{N}, V)$ et $(\mathcal{N}, V')$ sont deux jeux coopératifs avec le même ensemble de joueurs et si $\theta \in [0,1]$: $Sh\left(\theta V + (1-\theta) V'\right) = \theta Sh\left(V\right) + (1-\theta) Sh\left(V'\right)$.

Il existe bien d'autres façons de présenter et justifier la valeur de Shapley comme étant une solution de partage équitable. On trouve par exemple chez Myerson (1980) l'idée remarquable suivante. Considérons une coalition de référence quelconque $S \subseteq \mathcal{N}$ et considérons une solution Φ de partage de $V(S)$ qui spécifie aussi ce qu'il advient du partage dans le cas d'une défection de certains membres de S. Imposons à la négociation la condition suivante :

$$\text{Pour tout } i, j \in S : \Phi_i\left(S\right) - \Phi_i\left(S \backslash \{j\}\right) = \Phi_j\left(S\right) - \Phi_j\left(S \backslash \{i\}\right),$$

c'est-à-dire que, pour toute paire de négociateurs $\{i, j\} \subseteq S$, le coût imposé à i par la défection de j est égal au coût imposé à j par la défection de i. Il y a une idée d'égalité voisine de celle utilisée dans la définition du noyau mais cette fois l'égalité est appliquée aux coûts de défections, alors que dans le cas du noyau elle était appliquée aux plaintes maximales. Myerson a démontré que la solution de Shapley est l'unique solution satisfaisant cette propriété[121].

7.2 Appendice 2 : Jeux Simples[122] : Définitions, Représentation, Enumération et Solutions

7.2.1 Definitions

Un *jeu simple* est une paire $G = (N, \mathcal{W})$ où $N = \{1, \ldots, n\}$ avec $n \geq 2$ est un ensemble fini de joueurs et $\mathcal{W}$ est un ensemble de sous-ensembles de N satisaisant : $N \in \mathcal{W}$, $\varnothing \notin \mathcal{W}$ et la propriété de *monotonicité* $S \subseteq T \subseteq N$ et $S \in \mathcal{W} \Rightarrow T \in \mathcal{W}$. Les coalitions de $\mathcal{W}$ sont appelées *coalitions gagnantes.*

Le jeu simple G est *propre* si $S \in \mathcal{W} \Rightarrow N \backslash S \notin \mathcal{W}$.

Il est *fort* si $S \notin \mathcal{W} \Rightarrow N \backslash S \in \mathcal{W}$.

Il est de *somme constante* (auto-dual[123] ou décisif) s'il est propre et fort[124].

A chaque jeu simple G, on attache un jeu coopératif TU monotone (N, V_G) où :

$$V(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } S \in W \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Remarquons que (N, V_G) est suradditif ssi G est de somme constante.

[121] Voir Osborne et Rubinstein (1994) pour une présentation de toutes les solutions, y compris la valeur de Shapley, en termes d'objections et contre-objections.

[122] Voir Von Neumann et Morgenstern (1944), Shapley (1962) et Taylor et Zwicker (1999).

[123] Le dual de $(N, \mathcal{W})$ est le jeu simple $(N, \mathcal{B})$ où $S \in \mathcal{B}$ ssi $N \backslash S \notin \mathcal{W}$. Les coalitions dans la famille $\mathcal{B}$ sont appelées *coalitions bloquantes.*

[124] Certains auteurs utilisent le term *fort* (strong) pour *à somme constante.*

Au nombre des jeux simples figurent en bonne place les jeux majoritaires pondérés (en particulier le jeu majoritaire ordinaire). Un jeu simple G est un jeu majoritaire pondéré s'il existe un vecteur de poids $(w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et un quota $q > 0$ tels que :

$$S \in \mathcal{W} \text{ ssi } \sum_{i \in S} w_i \geq q$$

On dit alors que $[q, w_1, ..., w_n]$ est une *représentation* de G. Elle est dite *normalisée* si $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ et *intégrale* si les poids w_i sont des nombres entiers.

Si $q > \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2}$, le jeu G est propre.

Lorsque les poids w_i sont des entiers, le quota $\left\lceil \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le premier entier strictement supérieur à x désigne le quota majoritaire et le jeu simple associé est appelé le *jeu majoritaire ordinaire*. Si $\sum_{i \in N} w_i$ est impair, le jeu majoritaire ordinaire $\mathcal{W}$ est fort. Lorsque $\sum_{i \in N} w_i$ est pair, ce n'est plus nécessairement le cas. Lorsqu'une telle situation se présente[125], un second jeu est utilisé pour départager les ex aequo, par exemple, l'un des joueurs peut être utilisé comme "tie breaker". Dans le cas où tous les poids sont égaux à 1 et $q = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, on obtient le jeu majoritaire symétrique[126]. Si n est impair, le jeu majoritaire symétrique est fort.

Un joueur dispose d'un *pouvoir de veto* dans G si pour tout $S \subseteq N : i \notin S \Rightarrow S \notin \mathcal{W}$[127].

Un jour i est *fantôme* dans G si pour tout $S \in \mathcal{W} : i \in S \Rightarrow S \setminus \{i\} \in \mathcal{W}$.

Le jeu G est *dictatorial* si $\exists i \in N$ tel que $\{i\} \in \mathcal{W}$.

Désirabilité : Pour toutes coalitions $i, j \in N$, i est au moins aussi désirable que j, noté $i \succeq j$, si pour tout $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ $T \cup \{j\} \in W \Rightarrow T \cup \{i\} \in W$. Cette relation binaire est transitive mais n'est pas toujours complète.

Un jeu simple dont la relation de désirabilité $\succeq$ est complète est dit *complet* ou *linéaire*.

Il est dit *dirigé* s'il est linéaire et si l'ordre[128] de désirabilité des joueurs est l'ordre naturel.

Dans le cas d'un jeu majoritaire pondéré, on remarque que si $\omega_i \geq \omega_j$, alors i est au moins aussi désirable que j.

Cette relation de désirabilité a été étendue aux coalitions (voir par exemple Einy (1985)) sous la forme suivante : pour toutes coalitions S, S', on dit que S est au moins aussi désirable que S', ce qui est noté $S \succeq S'$, si pour tout $T \subseteq N \setminus \{S \cup S'\}$, $T \cup S' \in W \Rightarrow T \cup S \in W$.

7.2.2 Représentation et Enumération

Un jeu simple pondéré admet de multiples représentations.

Un jeu majoritaire pondéré est *homogène* s'il admet une représentation dont le vecteur de poids ω vérifie $\sum_{i \in S} \omega_i = \sum_{i \in T} \omega_i$ pour tout $S, T \in \mathcal{W}_m$ où $\mathcal{W}_m$ désigne l'ensemble des

[125] C'est par exemple la cas du collège électoral américain de 2008 avec $n = 51$ et des poids w_i tels que $\sum_{i \in N} w_i = 538$ et donc $\left\lceil \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2} \right\rceil = 270$. En cas d'égalité (269 votes pour chacun des deux candidats), c'est la chambre des représentants (qui comprend 435 membres) qui élit le président.

[126] Le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ est *symétrique* si $S \in \mathcal{W}$ et $|S| = |T| \Rightarrow T \in \mathcal{W}$.

[127] Ou de façon équivalente: $\{i\} \in \mathcal{B}$.

[128] L'ordre n'est pas strict en général.

coalitions gagnantes minimales; une telle représentation est appelée *représentation homogène.* En pareil cas le quota peut être choisi égal à $\underset{S\in\mathcal{W}_m}{Min}\,\omega(S)$. Une représentation intégrale ω est *minimale* s'il n'existe pas une autre représentation intégrale ω' telle que $\omega' \leq \omega$. Si une représentation intégrale ω vérifie $\omega \leq \omega'$ pour toute représentation intégrale ω' du jeu, alors elle est appelée la *représentation intégrale minimum.* L'existence et la nature d'une représentation intégrale mininum ont attiré une attention non négligeable. Nous indiquerons dans la sosu-section suivante de l'appendice 2 quelques relations intéressantes entre le nucléole d'un jeu majoritaire pondéré et ses représentations.

S'agissant de l'énumération, Krohn et Sudhölter (1995) démontrent en particulier que si G est un jeu majoritaire de somme constante et si $n \leq 8$, alors $LC(N, V_G) = N_u(N, V_G)$ qui coïncide avec l'unique (il s'agit donc de la représentation intégrale minimum) représentation intégrale de $(N, \mathcal{W})$. Pour $n = 9$, le résultat reste vrai à l'exception de 14 jeux qui ont deux représentations minimales; elles ne diffèrent que sur un type de joueurs. Dans 12 de ces jeux, les deux représentations sont les points extrémaux du moindre coeur et le nucléole est leur moyenne. Dans les deux cas restants, aucune représentation normalisée n'est contenue dans le moindre coeur bien que ce dernier soit un singleton (coîncidant donc avec le nucléole). Freixas, Molinero et Roura (2007) ont montré que ces 14 jeux ont une unique représentation intégrale minimale symétrique[129]; ils montrent aussi que ceci n'est plus vrai lorsque $n = 10$.
S'il n'est pas imposé au jeu d'être de somme constante, Freixas et Molinero (2009) ont montré que tous les jeux majoritaires pondérés ont une représentation intégrale minimum lorsque $n \leq 7$. Lorsque $n = 8$, il y a 154 jeux majoritaires sans représentation intégrale minimum mais tous ont une représentation intégrale minimum symétrique. Freixas et Molinero (2010) donnent des exemples de jeux simples majoritaires avec $n = 9$ n'ayant pas de représentation intégrale symétrique minimum.

L'énumération des jeux simples ou de certaines classes de jeux simples comme les jeux majoritaires pondérés est importante puisqu'elle renseigne sur le nombre de cas de figure auxquels l'explorateur peut être confronté. Les jeux simples de somme constante ont été énumérés par von Neumann et Morgenstern (1944) pour $n \leq 5$ et Gurk et Isbell (1959) pour $n = 6$. Isbell (1959) contient la liste des 135 jeux majoritaires pondérés de somme constante pour $n \leq 7$ avec leur representation intégrale minimum; 38 de ces jeux sont homogènes La Table **??** ci-dessous est empruntée à Krohn et Sudhölter (1995), à l'exception du nombre de jeux dirigés et du nombre de jeux majoritaires pour $n = 9$ qui sont extraits de Kurz (2012). Notons que Krohn and Sudhölter ne suppposent pas que $\varnothing \notin \mathcal{W}$, $N \in \mathcal{W}$ ou que le jeu est propre.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
# jeux dirigés	3	5	1	27	119	1173	44315	161175190	284432730176
# jeux majoritaires	3	5	10	27	119	1113	29375	2730166	989913346
# jeux dirigés à somme constante	1	1	2	3	7	21	135	2470	319124
# jeux majoritaires à somme constante	1	1	2	3	7	21	135	2470	175428

[129]Une représentation est *symétrique* si $\omega_i = \omega_j$ dès l'instant où $i \sim j$.

L'énumération de tous les jeux simples (incluant les cas extrêmes $V(\varnothing) = 1$ et $V(N) = 0$) est connue comme étant le problème de Dedekind. La table ci-dessous reproduit l'énumération pour $n \leq 6$.

n	1	2	3	4	5	6
# jeux simples	3	6	20	168	7581	7828354

L'énumération des jeux simples de somme constante est reproduite dans la table ci-dessous extraite de Loeb et Conway (2000) pour $n \leq 8$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
# jeux de somme constante	1	2	4	12	81	2646	1422564	229809982112

Les énumérations des deux dernières tables comptent des jeux qui sont isomorphiques. En se limitant aux classes d'équivalence, on obtient les chiffres reportés dans le tableau ci-dessous pour $n \leq 7$.

n	1	2	3	4	5	6	7
# classes d'équivalence de jeux à somme constante	1	1	2	3	7	30	716

7.2.3 Solutions

Dans cet appendice, nous allons examiner dans le contexte des jeux simples les concepts de solutions discutés dans l'appendice 1.

Dans le cas d'un jeu majoritaire pondéré de somme constante G, une imputation x est une représentation normalisée de G ssi $q(x) := \underset{S \in \mathcal{W}_m}{Min}\, x(S) > \frac{1}{2}$.

Peleg (1968) a démontré que toute imputation du moindre coeur d'un jeu majoritaire pondéré de somme constante est une représentation normalisée de G; il démontre aussi que si G est homogène, alors le nucléole est l'unique représentation normalisée homogène de G qui assigne un poids nul aux joueurs fantômes. Le nucléole est un vecteur à coordonnées rationnelles i.e. il peut être écrit sous la forme $x^*(G) = \frac{\omega^*}{\omega^*(N)}$ où les coordonnées ω_i^* pour tout $i \in N$ sont entières et ont un diviseur commun égal à 1. Peleg prouve que si G est un jeu majoritaire de somme constante alors ω^* est une représentation intégrale minimale ssi $\omega^*(N) = 2q(\omega^*) - 1$; si de plus le jeu est homogène, alors ω^* est la représentation intégrale minimum. Ostman (1987) a montré que tout jeu majoritaire homogène (pas nécessairement fort) admet une représentation intégrale minimum et que cette représentation est homogène.

Ces résultats mettent l'accent sur la relation entre le nucléole (et le moindre coeur) d'un jeu majoritaire pondéré et les représentations de ce jeu. Il est important de signaler que le nucléole n'est pas nécessairement une représentation du jeu si le jeu n'est pas à somme constante. Dans le cas des jeux à somme constante, si le jeu n'est pas homogène, ω^* n'est pas nécessairement une représentation intégrale minimale. Peleg (1968) a montré que ω^*

n'est pas une représentation intégrale minimale d'un jeu qui apparaît dans Isbell (1959) avec $n = 12$ et qui comporte deux représentations intégrales minimales. Isbell (1969) décrit un jeu avec $n = 19$ et une représentation intégrale minimum $\underline{\omega}$ telle que $\omega^* \neq \underline{\omega}$.

Le calcul de la valeur de Shapley dans le contexte des jeux simples a donné lieu à une très abondante littérature. Etant donné un jeu simple G et un joueur $i \in N$, on dira qu'une coalition S telle que $i \notin S$ est un "swing" pour le joueur i si $S \notin \mathcal{W}$ et $S \cup \{i\} \in \mathcal{W}$. Dans le cas où un joueur compte à son actif de nombreux "swings", on peut légitimement conclure qu'il est influent dans le contexte de ce jeu simple. Le nombre de "swings" du joueur i noté $\eta^i(\mathcal{W})$ rapporté au nombre total de coalitions ne contenant pas le joueur i définit ce que l'on appelle le *pouvoir de Banzhaf*[130] du joueur i dans le jeu simple G. Dans le texte, il est noté $B^i(G)$. Par conséquent:

$$B^i(G) = \frac{\eta^i(\mathcal{W})}{2^{n-1}}$$

Le pouvoir de Shapley-Shubik du joueur i dans le jeu simple G est sa valeur de Shapley dans le jeu simple (N, V_G) attaché à G. Il peut aussi s'écrire :

$$\sum_{S:S \text{ est un swing pour } i} \frac{|S|\,|N \backslash S \cup \{i\}|}{n!}$$

Il est facile de voir que le coeur d'un jeu simple est non vide ssi le jeu comporte des joueurs ayant un pouvoir de veto. Comme nous l'avons déjà signalé dans l'appendice 1, le calcul du noyau des jeux simples avec un nombre raisonnable de joeurs a été effectué par plusieurs auteurs. En revanche à notre connaissance, peu de résultats existent sur l'ensemble de marchandage des jeux simples à l'exception de Einy et Wettstein (1996) qui énoncent que si un jeu comporte des joueurs ayant un pouvoir de veto alors le coeur coïncide avec l'ensemble de marchandage.

7.2.4 Jeux de Vote et Théorème de Nakamura

Etant donné un jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$, un ensemble X d'alternatives et un profil $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ de fonctions d'utilité sur X telles que $u_i(x) \geq 0$ pour tout $i \in N$ et tout $x \in X$, on définit un jeu coopératif NTU $(N, V_{G,\mathbf{u}})$ de la façon suivante :

$$V_{G,\mathbf{u}}(S) = \begin{cases} \left\{u \in \mathbb{R}^S : \exists x \in X \text{ tel que pour tout } i \in S,\ u_i \leq u_i(x)\right\} \text{ si } S \in \mathcal{W} \\ \mathbb{R}^{\mathbb{S}}_{-} \text{ si } \mathbb{S} \notin \mathcal{W} \end{cases}$$

Lorsque X est le simplexe unitaire de dimension n, et $u_i(x) = x_i$, on obtient un jeu simple TU. Mais en général, il n'existe pas de numéraire pour procéder aux transferts d'utilité entre joueurs et le jeu est NTU. En revanche, il a en commun avec les jeux simples TU de classer les coalitions en deux groupes. D'un côté, celles qui sont gagnantes et qui peuvent de ce fait assurer n'importe quel profil d'utilités à ses membres sous réserve qu'ils se mettent d'accord

[130] Qui se distingue du pouvoir de Shapley-Shubik (1954).

sur une alternative. D'un autre côté, celles qui sont perdantes et qui n'ont aucun pouvoir : formellement cette absence de pouvoir est décrite par le fait que le seul vecteur d'utilités qu'elles peuvent garantir est le pire des vecteurs envisageables. Ce formalisme décrit tout simplement la situation où sous réserve d'une entente au sein de la coalition, les coalitions gagnantes peuvent imposer leur choix. Nous appellerons *jeu de vote* un jeu NTU construit à partir d'un jeu simple comme ci-dessus. Nous dirons que c'est un *jeu de vote fini* lorsque X est un ensemble fini et un *jeu de vote spatial* lorsque X est un sous-ensemble convexe d'un espace Euclidien[131].

Nous allons nous limiter ici à l'énoncé de quelques résultats sur le coeur de ces jeux de vote. Le principal résultat est du à Nakamura (1979). Pour l'énoncer, nous avons besoin de la notion suivante. Le *nombre de Nakamura* du jeu G, noté $\nu(G)$ est le nombre entier défini de la facon suivante :

$$\nu(G) = \begin{cases} \underset{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} : \cap_{S \in \mathcal{F}} S = \varnothing}{Min} |\mathcal{F}| & \text{si } \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{W} \text{ tel que } \cap_{S \in \mathcal{F}} S = \varnothing \\ +\infty \text{ si } & \cap_{S \in \mathcal{F}} S \neq \varnothing \end{cases}$$

Le nombre de Nakamura est infini ssi le jeu G comporte des joueurs ayant un pouvoir de veto.

Le théorème de Nakamura énonce que si X est fini alors le coeur du jeu de vote fini $((N, V_{G,\mathbf{u}})$ est non vide pour tout profil de fonctions d'utilité ssi $|X| \leq \nu(G) - 1$. Nous attirons l'attention sur le fait que ce théorème énonce une condition nécessaire et suffisante sur la taille de l'ensemble des alternatives pour que le coeur du jeu soit non vide *quel que soit* le profil de fonctions d'utilité. Autrement dit, il se peut que pour certains profils $\mathbf{u}$, le coeur du jeu $(N, V_{G,\mathbf{u}})$ soit non vide alors que $|X| \geq \nu(G)$. Lorsque X est un sous-ensemble compact et convexe d'intérieur non vide dans l'espace Eucidien $\mathbb{R}^{>}$, on obtient le résultat remarquable suivant dû à Greenberg (1979) : le coeur du jeu de vote spatial $((N, V_{G,\mathbf{u}})$ est non vide pour tout profil de fonctions d'utilité continues et quasi-concaves ssi $m \leq \nu(G) - 2$.

Pour étudier les implications du coeur en matière d'accords coopératifs, il faut donc savoir calculer le nombre de Nakamura $\nu(G)$ du jeu de vote G. Pour tout jeu propre, $\nu(G) \geq 3$. En toute généralité, ce calcul est difficile comme l'ont montré Bartholdi, Narasimhan et Tovey (1991). On sait cependant le calculer dans certains cas d'école. Par exemple, lorsque G est le jeu majoritaire pondéré $[q, 1, 1, ..., 1]$ avec $\frac{n}{2} < q < n$, $\nu(G) = \left\lceil \frac{n}{n-q} \right\rceil$.[132] On en déduit que $\nu(G) = 3$ pour le jeu majoritaire ordinaire dès l'instant où $n \neq 4$. Par ailleurs, pour tout jeu G de somme constante: $\nu(G) = 3$.

[131]Pour un exposé théorique du modèle spatial, on consultera Austen-Smith et Banks (1999,2005), Ordeshhok (1986) et Schofield (2008). Pour une présentation plus empirique et statistique du modèle spatial et de son utilisation, on consultera Poole (2005) et Poole et Rosenthal (2008). Pour une approche très géométrique des concepts de base, notamment des notions d'hyperplan (ligne) médian(e) et leurs utilisations, on pourra lire Feld, Grofman et Miller (1989).

[132]Lorsque $q \leq \frac{n}{2}$, le jeu n'est pas propre et lorsque $q = n$ c'est à dire lorsque l'unanimité est requise alors tous les joueurs ont un pouvoir de veto et donc $\nu(G) = +\infty$.

On en déduit que dans le cas d'un jeu majoritaire pondéré de somme constante G, le coeur est toujours non vide ssi le nombre d'alternatives est au plus 2 dans le cas fini et si la dimension de l'espace est au plus 1 dans le cas euclidien. Donc dans le cas du modèle spatial, il n'y a aucune garantie que le coeur soit non vide à l'exception du cas unidimensionnel pour lequel il est bien connu que l'alternative préférée du joueur médian appartient au coeur. Notons au passage que dans le cas du simplexe décrivant les allocations de portefeuille, la dimension est $n-1$. Par conséquent, le coeur sera non vide ssi $n-1 \leq \nu(G)-2=1$ et donc si $n \leq 2$!

Dans le cas du jeu majoritaire ordinaire, la situation est en fait nettement plus grave. En effet, dans ce cas, le coeur peut certes parfois être non vide mais cela se produit exclusivement dans des situations de symmétrie très restrictives identifiées par Plott (1967). On en déduit que dès que $m \geq 2$, *le coeur du jeu majoritaire ordinaire est génériquement vide* : dans tout voisinage d'un profil de fonctions d'utilité pour lequel le coeur est non vide, on peut trouver un profil pour lequel il est vide. Pour un jeu quelconque, ceci n'est plus vrai et pour tout jeu G, on a chercher à déterminer la plus grande dimension m, notée $\tau(G)$, pour lequel le coeur du jeu induit par G n'est pas génériquement vide. On trouvera un exposé complet des principaux résultats de la littérature sur ce sujet dans Austen-Smith et Banks (1999) et Schofield (2008). Par exemple, pour tout jeu G tel que $\nu(G) \neq \infty$, on sait que $\tau(G) \leq 2n-3$. Dans le cas du jeu majoritaire pondéré $[q,1,1,...,1]$, on sait que $\tau(G) < \frac{(n-q+1)(q-1)}{n-q}$. Ces bornes sont loin de la valeur de la vraie valeur de $\tau(G)$. Saari (1997) a démontré par exemple que si $n \geq 5$, pour tout jeu G tel que $\nu(G) \neq \infty$, $\tau(G) < \frac{3n-9}{2}$ et dans le cas du jeu majoritaire pondéré $[q,1,1,...,1]$, $\tau(G) < 2q-n+\max(0, \frac{4q-3n-1}{2(n-q)})$.

La question de la vacuité du coeur a conduit de nombreux auteurs à explorer des ensembles alternatifs à la fois "institution-free" et non vides dans des conditions très générales. Au nombre de ceux-ci, on peut citer l'*ensemble découvert* (Mc Kelvey (1986)), les *solutions de von Neumann-Morgenstern* (Von Neumann et Morgenstern (1944)), le *Heart* (Austen-Smith (1996), Schofield (1996, 1999)), la *solution competitive* (McKelvey Ordershook et Winer (1978)) et le *Yolk* (Feld et al (1987), Feld, Grofman et Miller (1988), Koehler (1990), McKelvey (1986), Miller (2007)) pour ne citer que quelques unes des solutions "institution-free" les plus étudiées. On peut aussi étudier des versions de l'ensemble de marchandage adaptées à ce contexte NTU comme celles de MasColell (1989), Vohra (1991) et Zhou (1994) dèjà évoquées dans l'appendice 1. En effet, l'ensemble de marchandage conventionnel peut être vide pour un jeu NTU arbitraire alors que ces nouveaux ensembles de marchandage sont non vides sous des conditions plus générales[133]. Il demeure néanmoins que l'ensemble de marchandage de Mas Colell peut être vide pour un jeu de vote fini, comme l'ont démontré Peleg et Sudholter (2005). L'étude générale de l'ensemble de marchandage des jeux de vote finis est réalisée par Holzman, Peleg et Sudhölter (2007).

Pour conclure, nous allons nous attarder un peu sur les notions de solution competitive

[133]Il existe aussi une notion d'ensemble de marchandage appelée *ensemble de marchandage ordinal* due à Asscher (1975). A notre connaissance, elle n'a pas été étudiée dans le contexte des jeux de vote. L'idée de dissuasion le long d'un cycle d'objections qui le définit apparaît aussi chez Wilson (1971) dans sa définition de l'ensemble de marchandage fort.

et de Heart.

La notion de *solution competitive* trouve ses racines dans la notion classique de von Neumann Morgenstern. En conservant les notations de l'appendice 1, nous dirons qu'un ensemble $\widehat{U} \subseteq U$ est une solution de von Neumann–Morgenstern (VNM), si (1) pour tout u, v dans $\widehat{U}$ nous n'avons ni $u \succ_V v$, ni $v \succ_V u$ et (2) pour tout $u \in U \backslash \widehat{U}$, il existe $v \in \widehat{U}$ tel que $v \succ_V u$. Notons que dans le cas d'un jeu simple, pour tout $S \in \mathcal{W} : V(S) = U$ et pour tout $S \in \mathcal{W}$ et pour tout $u \in V(S) : u_i = 0$ pour tout $i \in S$. Par conséquent, on peut reproduire la définition ci-dessus dans l'espace des alternatives. Un ensemble $Y \subset X$ est une solution de Von Neumann-Morgenstern si (1) pour tout x, y dans Y, $\nexists S, T \in \mathcal{W}$: $u_i(y) > u_i(x)$ pour tout $i \in S$ ou $u_i(x) > u_i(y)$ pour tout $i \in T$ et (2) pour tout $y \notin Y$ il existe $x \in X$ et $S \in \mathcal{W}$: tel que $u_i(x) > u_i(y)$ pour tout $i \in S$. Y est une solution VNM principale si pour tout $S \in \mathcal{W}_m$ il existe $x \in Y$ tel que $u_i(x) \geq u_i(y)\ \forall y \in Y$.

Notons au passage que dans le cas des jeux de vote, on peut décrire bon nombre des solutions à l'aide de la notion de *proposition* définie comme étant une paire $p = (x, S)$ où $x \in X$ et $S \in \mathcal{W}$. La proposition $p = (x, S)$ est (strictement) viable contre la proposition $p' = (x', S')$ s' il existe $i \in S \cap S'$ tel que $u_i(x) > u_i(x')$ (pour tout $i \in S \cap S'$, $u_i(x) > u_i(x')$). Soit $\mathcal{K} = (x_S, S)_{S \in \mathcal{W}^*}$ un ensemble fini de propositions. $\mathcal{K}$ est dit *équilibré* si toute proposition de $\mathcal{K}$ est viable contre toute proposition de $\mathcal{K}$. Une proposition p *détruit* $\mathcal{K}$ si elle est viable contre toutes les propositions de $\mathcal{K}$ et strictement viable contre au moins l'une d'entre elles. Une solution compétitive est un ensemble de propositions qui est équilibré et n'est détruit par aucune proposition. Bien que procédant du même esprit, la notion de solution compétitive ne se confond pas avec la notion de solution VNM. McKelvey, Ordeshook et Winer démontrent que si le jeu de vote admet un coeur alors pour toute alternative x dans le coeur, (x, N) constitue une solution compétitive. Si le jeu de vote admet une solution simple principale Y alors il existe une solution compétitive $\mathcal{K}$ telle que $p = (x, S) \in \mathcal{K}$ implique : $x \in Y$ et $S \in \mathcal{W}_m$. Il existe des jeux de vote pour lesquels certaines coalitions n'apparaissent pas dans les solutions compétitives[134].

Le *Heart* constitue une autre solution. Une présentation soignée de cette notion nécessite une très longue préparation. Faute d'espace, nous nous limiterons à des pointeurs en commencant par le cas différentiable. On suppose que pour tout i, les fonctions d'utilité u_i sont continûment différentiables et on note $p_i(x, u)$ le gradient de u_i au point x. Pour toute coalition $S \subseteq N$ et tout $x \in IntX$, on définit :

$$p(S, x, u) = \left\{ \begin{array}{c} y \in \mathbb{R}^m : y = \sum_{i \in S} \alpha_i p_i(x, u) \text{ tel que } \alpha_i \geq 0 \text{ pour tout} \\ i \in S \text{ et } \alpha_i \neq 0 \text{ pour un } i \in S \text{ au moins} \end{array} \right\}$$

$p(S, x, u)$ est le cône convexe engendré par les vecteurs gradients $(p_i(x, u))_{i \in S}$ au point x. On démontre que si pour tout i, u_i est pseudo-concave, alors :

$$x \in P(S, u) \text{ ssi } 0 \in p(S, x, u)$$

où $P(S, u)$ désigne l'ensemble des alternatives Pareto optimales à l'échelle de la coalition S. On en déduit que si pour tout i, u_i est pseudo-concave, alors :

$$x \text{ est dans le coeur du jeu de vote } (N, V_{G,\mathbf{u}}) \text{ ssi } 0 \in \cap_{S \in W} p(S, x, u)$$

[134] Le lecteur pourra consulter les articles originaux dédiés à ce sujet ou le chapitre 9 de Ordeshook (1986).

On a donc une description de l'ensemble de Pareto et du coeur du jeu sous la forme de conditions du premier ordre. Dans cette veine, on peut poursuivre l'analyse locale en définissant :

$$P_{in}(S,u) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X : \text{il existe } (\alpha_i)_{i \in S} \text{ tel que } \alpha_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in S \text{ et } \alpha_i \neq 0 \text{ pour} \\ \text{un } i \in S \text{ au moins tel que } 0 = \sum_{i \in S} \alpha_i p_i(x,u) \end{array} \right\}$$

appelé *ensemble de Pareto infinitésimal*. La pseudo-concavité est utilisée pour obtenir la propriété $x \in P(S,u)$ ssi $0 \in p(S,x,u)$ énoncée plus haut, mais l'implication $x \in P(S,u) \Longrightarrow 0 \in p(S,x,u)$ reste vraie sans cette hypothèse. Par conséquent :

$$P(S,u) \subseteq P_{in}(S,u).$$

On peut également définir le *coeur infinitésimal* comme l'intersection $P_{in}(u) = \cap_{S \in W} P_{in}(S,u)$. De l'inclusion ci-dessus on déduit que le coeur est un sous ensemble du coeur infinitésimal.

On peut alternativement présenter ces notions locales en retenant comme objet de choix la direction éventuelle de changement par rapport au point testé. De ce point de vue, la préférence d'un individu i au point x, c'est à dire l'ensemble des directions préférées au status quo, est décrit par l'ensemble $h_i(x,u) = \{v \in \mathbb{R}^{\gtrdot} : \beth(\curvearrowleft, \approxeq) \cdot \gtrsim > \nvdash\}$. Schofield (1984) utilise le terme de *champ de préférence*[135]. Pour tout $S \subseteq N$, on définit $h_S(x,u) = \cap_{i \in S} h_i(x)$ et $h(x,u) = \cup_{S \in W} h_S(x,u)$: cet ensemble décrit les directions socialement préférées au status quo. On définit l'*ensemble de Pareto critique* comme étant l'ensemble :

$$P_{cr}(u) = \{x \in X : h_N(x,u) = \varnothing\}$$

et le *coeur critique* comme étant l'ensemble :

$$C_{cr}(u) = \{x \in X : h(x,u) = \varnothing\}$$

On peut enfin définir l'*ensemble de Pareto local* et le *coeur local* sans hypothèse de différentiabilité. Une alternative x est dans l'ensemble de Pareto local lorsque lorsqu'il existe un voisinage de x ne contenant aucune alternative unanimement préférée à x. Une alternative x est dans le coeur local s'il existe un voisinage de x tel qu'aucune alternative dans ce voisinage n'est préférée à x par tous les membres d'une coalition gagnante.

Lorsques les préférences sont différentiables, on peut démontrer que le coeur (ensemble de Pareto) est contenu dans le coeur local (ensemble de Pareto local) qui est lui même contenu dans le coeur critique (l'ensemble de Pareto critique). Si les fonctions d'utilité sont pseudo concaves, ces inclusions sont des égalités[136]. On démontre également[137] que l'ensemble de Pareto critique et l'ensemble de Pareto infinitésimal coïncident et donc que le coeur critique coïncide avec le coeur infinitésimal.

A côté des notions de coeur, figurent les notions d'ensembles cycliques. Dans le cas où X est fini, la vacuité du coeur est équivalente à l'existence de cycles dans la préférence sociale.

[135]C'est notre traduction de *preference field*.
[136]Voir par exemple le lemme 4.3.1 dans Schofield (2008).
[137]Voir par exemple lemme 4.3.2 dans Schofield (2008).

Le *cycle supérieur* désigne l'ensemble des alternatives x telles que pour tout $y \neq x$ il existe une suite finie[138] $(x_j, S_j)_{1\leq j\leq r}$ telle que $x_1 = x, x_r = y$, $S_j \in W$ et $u_i(x_j) > u_i(x_{j-1})$ pour tout $j = 1, ..., r$ et tout $i \in S_j$: une alternative est dans le cycle supérieur si elle domine toutes les autres via une chaine d'alternatives intermédiaires. On remarque que tout sous-ensemble fini du cycle supérieur est contenu dans un *cycle*[139]. Par ailleurs lorsque la préférence sociale est complète, on vérifie que le cycle supérieur est non vide et coïncide avec le coeur lorsque ce dernier est non vide. Lorsque le coeur est vide, le cyle supérieur est en revanche souvent très gros et contient parfois des alternatives Pareto dominées. Dans le cas spatial, si le jeu simple est de somme constante et sans joueurs ayant un pouvoir de véto, alors génériquement sur l'ensemble des profils de préférences, soit le coeur est non vide, soit le cycle supérieur est X[140]. Ce résultat cesse d'être vrai lorsque le jeu simple n'est pas de somme constante mais on démontre dans le cas général que le prix à payer pour avoir moins de cycles stricts est d'avoir un cycle supérieur faible (c'est à dire construit à partir de la préférence sociale faible) égal à X. Schofield (1978,1984) a réexaminé cette question d'un point de vue local. Une alternative x est dans l'ensemble cyclique local $CL(u)$ si pour tout voisinage de x, il existe un cycle contenu dans ce voisinage et contenant x. Considérons un champ de préférence social $h : X \to \mathbb{R}^{\gtrdot}$. Il est dit demi-ouvert si pour tout x tel que $h(x) \neq \varnothing$ il existe un vecteur $\rho(x) \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$ tel que: $v \cdot \rho(x) > 0$ pour tout $v \in h(x)$. Une alternative x est dans l'ensemble cyclique infinitésimal $IC(u)$ si $h(x)$ n'est pas demi-ouvert. Schofield (1978) démontre[141] que $IC(u)$ est ouvert et que si $x \in IC(u)$ alor il existe un voisinage de x tel que pour tout y dans ce voisinage, il existe un chemin de y vers x. On en déduit que $IC(u) \subseteq LC(u)$. Il démontre aussi que $LC(u)$ est contenu dans la fermeture de $IC(u)$. Les deux ensembles sont donc très proches. Schofield démontre que si $m \leq \nu(G) - 2$, alors $IC(u) = \varnothing$ pour tout profil u. Enfin, Schofield (1978) démontre que $x \in IC(u)$ ssi $p(x, u) = \cap_{S\in W} p(S, x, u) = \emptyset$.

En résumé, sous des hypothèses de différentiabilité, nous avons une situation claire. Schofield démontre que si $IC(u)$ est vide alors le coeur infinitésimal en u est non vide.Schofield a démontré plusieurs résultats établissant des liens entre le coeur critique et l'ensemble cyclique local. Sous des hypothèses additionnelles de pseudo-concavité adéquates (qui sont satisfaites en particulier dans le cas de la version Euclidienne du modèle spatial), ces résulats locaux deviennent globaux. Il définit le Heart du jeu de vote au profil **u** comme la réunion du coeur du jeu et de la fermeture de l'ensemble cyclique local. Cet ensemble est non vide. Sous des hypothèses de convexité, Schofield (1995) démontre que le Heart est un sous-ensemble de l'ensemble de Pareto. Sa structure géométrique n'est pas facile à décrire. Schofield (1999) définit une version locale de la relation de couverture et démontre que le heart peut aussi être décrit comme l'ensemble des alternatives non couvertes au sens local. Dans le cas Euclidien et du jeu majoritaire ordinaire, il correspond à l'ensemble des points bornés par une partie des lignes médianes. Ceci implique que le Heart est dans ce cas un ensemble étoilé.

[138] Dans la suite, nous utiliserons l'expression : chemin de x vers y.

[139] Un cycle est une suite finie $(x_j, S_j)_{1\leq j\leq r}$ telle que $x_1 = x_r = x$, $S_j \in W$ et $u_i(x_j) > u_i(x_{j-1})$ pour tout $j = 1, ..., r$ et tout $i \in S_j$

[140] Ce résultat répertorié sous le vocable "théorème du chaos" est dû à Mc Kelvey (1976,1979). Voir théorème 6.4. dans Austen-Smith et Banks (1999).

[141] Il démontre également que $x \in IC(u)$ ssi $p(S, x, u) = \varnothing$ pour tout $S \in \mathcal{W}$.

7.3 Appendice 3 : Externalités entre Coalitions et Limites de l'Approche en Termes de Fonction Caractéristique

Dans cet article, nous avons choisi de modéliser le jeu coopératif en utilisant le concept classique de fonction caractéristique. Un autre choix de modélisation aurait consisté à retenir le concept plus général de *fonction de partition* (Rosenthal (1972), Thrall et Lucas (1963)). Cette fois, pour chaque partition concevable π de l'ensemble des joueurs et chaque coalition S dans cette partition, on associe une valeur $V(S;\pi)$. Une *valeur* est une fonction σ qui attache à toute fonction de partition V un vecteur de paiements $\sigma(V) \in \mathbb{R}^n$ (un paiement pour chacun des joueurs). On peut également définir des concepts de coeur et des concepts de suradditivité. La fonction de partition considérée peut (suivant l'application considérée) présenter soient des *externalités négatives* : du point de vue d'une coalition S, plus la partition de $N \backslash S$ est fine, plus son surplus est élevé ou *positives* : plus la partition de $N \backslash S$ est fine, plus son surplus est bas.

Nous allons nous borner ici à illustrer les différences entre fonction caractéristique et fonction de partition dans le cas des alliances électorales de gauche étudiées par Le Breton et Van Der Straeten (2013) et exposées dans la section 3.4. Peut-on faire l'économie du concept de fonction de partition dans le cadre de cette application ? Clairement dans le cadre d'un jeu à 3 joueurs, la seule différence éventuelle entre la fonction caractéristique et la fonction de partition porte sur les singletons : que peut espérer un parti qui se présente seul au second tour ? Nous allons examiner ci-dessous cette question dans le cas où la composante prime est ignorée. Trois cas se présentent :

1. Si les trois partis peuvent se maintenir seuls, le jeu est additif et la question est sans intérêt.
2. Si seul le parti fort peut se maintenir seul, alors la question est également sans intérêt.
3. Si les deux partis les plus forts peuvent se maintenir (seuls) et que le dernier a besoin de s'allier, alors si le parti 1 ou(et) 2 décide(nt) de faire cavalier(s) seul(s) alors il(s) doit(vent) se demander ce que vont faire les deux autres.

Dans ce dernier cas, la fonction de partition s'écrit (en reprenant les notations introduites dans la section 3.4 du texte principal) :

$$V(S;\pi) = \begin{cases} \frac{N_1}{N_+} \text{ si } S = \{1\} \text{ et } \pi = \{\{1\}, \{2,3\}\} \\ \frac{N_1}{N_+ - N_3} \text{ si } S = \{1\} \text{ et } \pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \\ \frac{N_2}{N_+} \text{ si } S = \{2\} \text{ et } \pi = \{\{2\}, \{1,3\}\} \\ \frac{N_2}{N_+ - N_3} \text{ si } S = \{2\} \text{ et } \pi = \{\{2\}, \{1\}, \{3\}\} \\ 0 \text{ si } S = \{3\} \text{ quelle que soit } \pi \\ \frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3} \text{ si } S = \{1,2\} \\ \frac{N_1 + N_3}{N_+} \text{si } S = \{1,3\} \\ \frac{N_2 + N_3}{N_+} \text{ si } S = \{2,3\} \\ \frac{N_1 + N_2 + N_3}{N_+} \text{ si } S = \{1,2,3\} \end{cases}$$

Quelle est la solution équivalente à la valeur de Shapley dans le cas d'une fonction de partition ? Maskin (2003) a proposé une extension de la valeur de Shapley à ce contexte. Une famille de valeurs ont été introduites et axiomatisées par De Clippel et Serrano (2008) Il n'existe aucune formule générale de calcul de la valeur de Maskin et des valeurs de De Clippel et Serrano (DCS ci après). De Clippel et Serrano démontrent que si σ est une valeur satisfaisant leurs axiomes d'anonymat, d'efficacité et de monotonicité alors pour tout $i \in N$, $\sigma_i(V) \in [\mu_i(V), \nu_i(V)]$ où les bornes sont les valeurs de deux programmes linéaires. Dans le cas où $n = 3$, ils montrent que :

$$\begin{aligned}
\mu_i(V) &= \sigma_i^*(V) - \frac{Max\{0, \varepsilon_j(V) - \varepsilon_i(V)\} + Max\{0, \varepsilon_k(V) - \varepsilon_i(V)\}}{6} \\
\nu_i(V) &= \sigma_i^*(V) + \frac{Max\{0, \varepsilon_i(V) - \varepsilon_j(V)\} + Max\{0, \varepsilon_i(V) - \varepsilon_k(V)\}}{6}
\end{aligned}$$

où :

$$\varepsilon_i(V) = V(\{i\}; \{\{i\}, \{j,k\}\}) - V(\{i\}; \{\{i\}, \{j\}, \{k\}\})$$

est l'indice d'externalité attaché au joueur i et σ^* est l'unique valeur[142] satisfaisant les axiomes d'anonymat, d'efficacité et de marginalité. $\sigma_i^*(V)$ se calcule facilement car $\sigma_i^*(V)$ est la valeur de Shapley (ordinaire) du joueur i dans le jeu sans externalités décrit par la fonction caractéristique $V^*(S) = V(S; \left\{S, \{j\}_{j \in N \setminus S}\right\}$. Cette valeur est appelée "externality-free value" par DCS. Dans le cas de notre jeu :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(V) &= \frac{N_1}{N_+} - \frac{N_1}{N_+ - N_3} = -\frac{N_1 N_3}{N_+(N_+ - N_3)} \\
\varepsilon_2(V) &= -\frac{N_2 N_3}{N_+(N_+ - N_3)} \\
\varepsilon_3(V) &= 0
\end{aligned}$$

et :

$$V^*(S) = \begin{cases}
0 \text{ si } S = \{3\} \\
\frac{N_1}{N_+ - N_3} \text{ si } S = \{1\} \\
\frac{N_2}{N_+ - N_3} \text{ si } S = \{2\} \\
\frac{N_1 + N_3}{N_+} \text{si } S = \{1,3\} \\
\frac{N_2 + N_3}{N_+} \text{ si } S = \{2,3\} \\
\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3} \text{ si } S = \{1,2\} \\
\frac{N_1 + N_2 + N_3}{N_+} \text{ si } S = \{1,2,3\}
\end{cases}$$

On remarque que V^* n'est pas suradditive en raison de l'externalité négative (en effet, on

[142] Proposition 3 dans DCS.

observe que $V^*(\{1\}) + V^*(\{2,3\}) > V^*(\{1,2,3\})$). Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma_1^*(V) &= \frac{N_1}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{3N_1}{N_+ - N_3}\right] \\
\sigma_2^*(V) &= \frac{N_2}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{3N_2}{N_+ - N_3}\right] \\
\sigma_3^*(V) &= \frac{2N_3}{3N_+} - \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{3(N_1 + N_2)}{N_+ - N_3}\right]
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\mu_1(V) &= \frac{N_1}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right], \nu_1(V) = \frac{N_1}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{3N_1}{N_+ - N_3}\right] \\
\mu_2(V) &= \frac{N_2}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{2N_2}{N_+ - N_3}\right], \nu_2(V) = \frac{N_2}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{N_1 + 2N_2}{N_+ - N_3}\right] \\
\mu_3(V) &= \frac{2N_3}{3N_+} - \frac{1}{2}\frac{N_3}{N_+}\left[\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right], \nu_3(V) = \frac{2N_3}{3N_+} - \frac{1}{3}\frac{N_3}{N_+}\left[\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right]
\end{aligned}$$

A titre de comparaison, rappelons que la fonction caractéristique V^{**} considérée dans notre article est $V^{**}(S) = V(S; \{S, N\backslash S\})$. Elle diffère de V^* puique $V^{**}(\{1\}) = \frac{N_1}{N}$ et $V^{**}(\{2\}) = \frac{N_2}{N}$. La valeur de Shapley que nous utilisons dans notre article est décrite par le vecteur :

$$\begin{aligned}
Sh_1(V^{**}) &= \frac{N_1}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right] \\
Sh_2(V^{**}) &= \frac{N_2}{N_+} + \frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[1 + \frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right] \\
Sh_3(V^{**}) &= \frac{2N_3}{3N_+} - \frac{1}{3}\frac{N_3}{N_+}\left[\frac{N_1 + N_2}{N_+ - N_3}\right]
\end{aligned}$$

On constate que $Sh_3(V^{**})$ correspond à la borne supérieure du cube de DCS alors que $Sh_1(V^{**})$ correspond à la borne inférieure de ce cube. La valeur de $Sh_2(V^{**})$ est intermédiaire entre les deux bornes. On constate que pour toutes les valeurs, le joueur 3 récupère au mieux les $\frac{2}{3}$ de sa part. En fait, il faut enlever aux $\frac{2}{3}$ une fraction additionnelle qui oscille entre $\frac{1}{3}\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3} = \frac{1}{3}\frac{N_1+N_2}{N_1+N_2+N_4}$ et $\frac{1}{2}\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3} = \frac{1}{2}\frac{N_1+N_2}{N_1+N_2+N_4}$ et qui est d'autant plus élevée que N_4 est petit. A strictement parler, les différentes valeurs décrivent des partages différents mais les différences entre ces différents partages sont respectivement bornées pour les trois joueurs par $\frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\frac{2N_1-N_2}{N_+-N_3}$, $\frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\frac{N_1}{N_+-N_3}$ et $\frac{1}{6}\frac{N_3}{N_+}\left[\frac{N_1+N_2}{N_+-N_3}\right]$. Dans le cas du Limousin, on obtient par exemple des écarts égaux à $1,59\,8\%$, $0,96\%$ et $1,29\%$. Nous conjecturons que dans le cas de la valeur de Shapley les différences entre les différentes valeurs attachées à la fonction de partition sont négligeables.

Comme nous l'avons déjà indiqué, Le Breton et Van Der Straeten (2013) ne proposent pas un modèle destiné à expliquer la nature des coalitions qui se forment; ils postulent que la grande coalition se forme[143]. Autant cette hypothèse est naturelle en l'absence d'externalités lorsque la fonction caractéristique est suradditive, autant elle est plus discutable en présence d'externalités. Comme le montre Halafir (2007), la suradditivité de la fonction de partition n'implique plus nécessairement que la grande coalition est efficace. Cette difficulté est ignorée par DCP (2008) dont l'axiome d'efficacité suppose la formation de la grande coalition. En revanche, la question de la formation des coalitions est au coeur des articles de Maskin et d'Hafalir. Ces deux auteurs étudient un protocole de négociation. Hafalir démontre que le protocole produit toujours une partition efficace qui ne coïncide pas nécessairement avec la grande coalition. Maskin démontre que dans le cas d'une fonction de partition avec externalités négatives et $n = 3$, on obtient la grande coalition; ceci cesse d'être vrai en cas d'externalités positives. Il démontre aussi que la grande coalition émerge dans le cas où la fonction caractéristique $V^{**}(S) = V(S; \{S, N \backslash S\})$ a un coeur non vide.

7.4 Appendice 4: Compléments au texte: Illustration de la logique de marchandage sur des exemples danois et finlandais

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3 du texte principal, dans le cas Belge des élections de novembre 1958, l'ensemble de marchandage a offert une explication du "relative weakness effect". Dans cet appendice, nous présentons d'autres exemples concrets de cette logique de marchandage, empruntés à l'histoire politique du Danemark et de la Finlande. L'objet de cet appendice est de proposer certains caculs supplémentaires du noyau et des ensembles de marchandage considérés par Schofield. Les ensembles de marchandage notés $B_2(M, V)$ et $B_*(M, V)$ seront notés ici $B_2(M, \mathcal{W})$ et $B_*(M, \mathcal{W})$ car dans le contexte des jeux simples, la fonction caractéristique est complètement déterminée par $\mathcal{W}$. Nous omettrons même la dépendance à pour écrire plus simplement $B_2(M)$ et $B_*(M)$.

Nous allons tout d'abord montrer à l'aide d'un exemple également tiré de Schofield et Laver (1985) que le "relative weakness effect" ne se produit pas nécessairement dans le cas de gouvernements avec beaucoup de partenaires. En Finlande après les élections de mai 1954, un gouvernement comprenant 4 partis B, D F et G est formé. Sachant qu'il y a 200 sièges au parlement, les deux premiers partis avec 107 sièges aurait pu former une coalition gagnante comme le montrent les résultats reportés dans le tableau ci-dessous :

Insérer la table 5 de Laver et Schofield BJPS ici

La répartition de portefeuilles obervée fut (6, 6, 1, 1) alors que Gamson prédisait (5.25, 5.15, 1.26, 2.34). Examinons les implications de l'ensemble de marchandage. Supposons que le le parti D n'ait reçu par exemple que 4 portefeuilles. Quelle pourrait etre une objection de ce parti contre les trois autres ? Puisqu'il contrôle 90 sièges, il a besoin soit de A soit de E. Il peut par exemple demander 5 postes, en proposer 4 à A et 5 à D. Les trois partenaires

[143]Dans le cas des élections régionales de 2010, la grande coalition a toujours émergée à l'exception de la Bretagne. Dans le cas de la Bretagne, le jeu (à 2 joueurs, le PS et EE) est additif et donc non strictement sur-additif. La formation de la coalition devient plus sensible à des facteurs (gains ou pertes) non modélisés dans leur article.

attaqués ne disposent que de 4 postes pour contre attaquer ce qui insuffisant pour "acheter" A ou D. On peut montrer ici que D peut se garantir ainsi 5 postes ainsi que C. Considérons maintenant le parti G. Il ne contrôle que 24 sièges, et on montre qu'il ne peut se garantir aucun siège. Ici le noyau est $(7,7,0,0)$ mais puisque les deux gros partis ne peuvent se garantir que 5 sièges, la répartition $(6,6,1,1)$ fait partie de l'ensemble de marchandage.

Nous terminons ces diverses études de cas par celui du Danemark en 1957, étudié de manière plus approfondie par Schofield (1982). Au terme des élections de mai 1957, le parlement danois se présente comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Insérer la table 1 de Schofield 1982 ici

Le gouvernement est consitué des partis C, D et H. Il contrôle 93 sièges. Sachant que le parlement comprend 174 sièges, il en faut 88 pour constituer une majorité. Le jeu majoritaire pondéré décrivant la situation est donc : $[88; 70, 14, 9, 6, 45, 30]$ ou de façon équivalente, $[8; 5, 2, 1, 1, 3, 3]$ en considérant la représentation intégrale minimale. On constate que le gouverment forme une coalition gagnante minimale. Nous noterons M la coalition gouvernementale.

Ici le noyau correspond à l'allocation égalitaire $k = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = (0.33, 0.33, 0.33)$. L'allocation observée $(9, 4, 3)$ des 16 portefeuilles ministériels correspond au partage $x^* = (0.56, 0.25, 0.19)$ alors que Gamson suggère $g = (0.75, 0.15, 0.10)$. Clairement, les deux plus petits partis du gouvernement sont avantagés par rapport à Gamson et conformément aux résultats de Schofield (1976), cette déviation est bien identifiée qualitativement par le noyau dans le sens où lorsque $k_i < g_i$ alors $x_i^* < g_i$ et lorsque $k_i > g_i$ alors $x_i^* > g_i$. En revanche, le noyau exagère les déviations.

Schofield démontre que $B_2(G)$ est vide.

L'argument est le suivant. Soit x une imputation.

Supposons $x_C < \frac{1}{2}$. Supposons que C formule une objection $y = (y_C, y_E, y_F)$ contre $\{D, H\}$ telle que $y_E + y_F > \frac{1}{2}$. D et H ne contrôlent que 23 sièges et ont donc besoin de 65 sièges supplémentaires pour réagir crédiblement. Ils ont donc besoin à la fois de E et F. Mais pour construire une contre-objection justifiée $(z, DHEF)$ il faut à la fois $z_D + z_H > \frac{1}{2}$ et $z_E + z_F > \frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Par conséquent, toute imputation x dans $B_2(M)$ vérifie : $x_C \geq \frac{1}{2}$.

Supposons $x_H < \frac{1}{4}$. Supposons que H formule une objection $y = (y_H, y_A, y_E, y_F)$ contre $\{C, D\}$ telle que $y_A = y_E = y_F = \frac{1}{4}$. C et D ne contrôlent que 84 sièges et ont donc besoin de 4 sièges supplémentaires pour réagir crédiblement. Ils ont donc besoin de A, ou E ou F et offrir minimalement $\frac{1}{4}$ à ce partenaire. Mais ceci est impossible car $x_C + x_D > \frac{3}{4}$. Par conséquent, toute imputation x dans $B_2(M)$ vérifie : $x_H \geq \frac{1}{4}$.

Supposons enfin $x_D < \frac{1}{3}$. Supposons que D formule une objection $y = (y_D, y_E, y_F)$ contre $\{C, H\}$ telle que $y_E = y_F = \frac{1}{3}$. C et H ne contrôlent que 79 sièges et ont donc besoin de 9 sièges supplémentaires pour réagir crédiblement. Ils ont donc besoin de E ou F et offrir minimalement $\frac{1}{3}$ à ce partenaire. Mais ceci est impossible car $x_C + x_H > \frac{2}{3}$. Par conséquent, toute imputation x dans $B_2(M)$ vérifie : $x_D \geq \frac{1}{3}$.

Puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} > 1$, on en déduit que $B_2(M) = \varnothing$.

Schoffield (1982) propose une analyse géométrique complète de l'ensemble de marchandage conventionnel $B_1(M)$. L'arrangement observé en fait partie ainsi que g et k.

A titre d'illustration, examinons ici quelques propriétés de $B_1(M)$. Soit x une imputation.

Si $x_C < \frac{1}{2}$, examinons dans quel cas C a une objection justifiée contre D ou contre H. Si $x_C < x_H$, alors C peut objecter avec E et F. Pour contrer cette objection, H a besoin de A, E et F mais ne peut leur offrir que $1 - x_H$. Puisque $1 - x_H < 1 - x_C$, c'est impossible. Un argument similaire s'applique dans le cas où $x_C < x_D$. Donc si $x \in B_1(M)$ vérifie $x_C < \frac{1}{2}$, alors $x_C \geq x_D, x_H$.

Si $x_D < \frac{1}{5}$, montrons que D a une objection justifiée contre C ou contre H. Puisque $x_D < \frac{1}{5}$, soit $x_C > \frac{3}{5}$, soit $x_H > \frac{1}{5}$. Dans le premier cas, D a une objection justifiée y contre C en offrant $y_E = y_F = \frac{2}{5}$. C ne peut pas contrer avec H puisqu'alors, il ne lui resterait plus rien pour acheter le partenaire qui manque. Et sans H, il lui faut au moins acheter E ou F ce qui impossible car $1 - x_C < \frac{2}{5}$. Si $x_H > \frac{1}{5}$, H ne peut contrer qu'avec E et F et donc leur donner au moins au total $\frac{4}{5}$ ce qui est impossible puisque $1 - x_H < \frac{4}{5}$. Donc si $x \in B_1(M)$, $x_D \geq \frac{1}{5}$. Par ailleurs si $x_D < \frac{1}{3}$ et $x_D < x_H$, D a une objection justifiée y contre H avec $y_E = y_F = \frac{1-x_D-\epsilon}{2}$ où ϵ est un nombre positif voisin de 0. En effet, H ne peut pas contrer avec C. Il ne peut pas contrer non plus avec E et F car dans ce cas-là, il lui faudrait $1 - x_D - \epsilon < 1 - x_H$ si ϵ est suffisamment petit. Donc si $x \in B_1(M)$ vérifie $x_D < \frac{1}{3}$ alors $x_D \geq x_H$.

Si $x_H < \frac{1}{8}$, montrons que H a une objection justifiée contre C ou contre D. Considérons y avec $y_E = y_F = \frac{3}{8}$et $y_A = \frac{1}{8}$. Si $x_C > \frac{5}{8}$, alors y est une objection justifiée contre C. En effet, C ne peut contrer avec E ou F. Si $x_C \leq \frac{5}{8}$, alors $x_D > \frac{2}{8}$ et dans ce cas y est une objection justifiée contre D car D ne peut pas contrer avec E et F. Donc si $x \in B_1(M)$, $x_H \geq \frac{1}{8}$. Par ailleurs si $x_H < \frac{1}{4}$, alors $x_D \leq 2x_H$. Sinon H a une objection justifiée y contre D avec $y_H = x_H + \epsilon$, $y_A = p + \epsilon$, $y_E = y_F = p + \frac{1-4p}{2} + \epsilon$ où $x_H < p < \frac{1}{4}$ et $\epsilon > 0$ est choisi pour que $y_H + y_A + y_E + y_F = 1$. Clairement D ne peut pas contrer avec C car $1 - x_D - x_C < \frac{1}{4}$. D ne peut pas non plus contrer avec E et F car $1 - x_D < 1 - 2p < y_E + y_F$. Donc si $x \in B_1(M)$ vérifie $x_H < \frac{1}{4}$ alors $x_D \leq 2x_H$.

Schoffield (1982) calcule aussi l'ensemble de marchandage $B^*(M)$ et montre qu'il ne contient pas l'arrangement observé, l'arrangement $(8, 5, 3)$ étant l'unique vecteur entier dans $B_*(M)$. On note qu'il est beaucoup plus proche de l'arrangement observé $(9, 4, 3)$ que ne l'est $(12, 2, 2)$, la version entière de Gamson.

Schofield (1982) poursuit par une analyse très détaillée de l'histoire gouvernementale de La Finlande de 1945 à 1971 qui comprend 8 élections et pas moins de 16 gouvernements. La coïncidence entre les répartitions observées de portefeuille et celles prédites par B_2 (ou B_* lorsque B_2 est vide) est frappante. A cette exploration, vient s'ajouter un calcul qui éclaire la question 1. Durant cette période, la Finlande a compté 10 gouvernements minimaux, 10 avec surplus et 4 minoritaires. Schofield démontre en parcourant exhaustivement l'ensemble des coalitions gagnantes susceptibles de former un gouvernement majoritaire après les élections de mars 1966, qu'aucune d'elles ne comprenait un arrangement stable au sens de B_2. Il suggère que le chaos en résultant peut expliquer pourquoi les gouvernements qui ont vu le jour ont été des gouvernements de surplus.