Résolution d'un programme linéaire sous incertitude avec l'Uninorme R_*

Zoé Krug[1], Romain Guillaume[2], Olga Battaïa[1]

[1] ISAE-SUPAERO, Université de Toulouse, 10 av. E. Belin - 31055 Toulouse Cedex 4, France
{zoe.krug,olga.battaia}@isae.fr

[2] Université de Toulouse-IRIT, 5,Allées A. Machado 31058 Toulouse Cedex 1, France
romain.guillaume@irit.fr

Mots-clés : *optimisation robuste, uninorme*

1 Introduction

Lors de la résolution d'un problème de décision, il est souvent nécessaire de tenir compte de l'incertitude des paramètres, par exemple sur les valeurs des coûts. Plusieurs critères ont été proposés dans la littérature pour prendre en compte l'optimisme du décideur dans le cas des scénarios discrets. Les plus classiques sont Hurwicz [1] et OWA [3]. Dans le critère OWA, on classe les coûts des différents scénarios du meilleur au moins bon, puis on calcule une moyenne pondérée sur les coûts classés (les poids dépendent du classement). Le critère d'Hurwicz est un cas particulier de l'OWA quand le meilleur scénario a un poids de α, le pire scénario a un poids de $1-\alpha$ et tous les autres scénarios ont un poids de 0. Ces deux critères sont compensatoires, c'est à dire qu'un bon scénario va atténuer l'effet d'un mauvais scénario et inversement.

Dans cet article, on se place dans le cas où l'ensemble des scénarios est fini et équiprobable et on s'intéresse à prendre en compte l'optimisme du décideur avec un critère qui ne soit pas compensatoire, distinguant ainsi des zones de risques et d'opportunités. On va utiliser pour cela un critère d'agrégation R_* appartenant à la famille des Uninormes. D'abord on définit ce critère et ses propriétés pour l'utiliser ensuite pour résoudre un programme linéaire (PL).

2 Description de l'Uninorme

Définition 1 *L'Uninorme [2] notée "R" est un opérateur d'agrégation binaire sur [0,1] qui satisfait: la commutativité, l'associativité, la monotonie et un élément neutre "e" appelé "identité" tel que R(e,x)=x.*

Sur $[0, e]$, une Uninorme se comporte comme une t-norme, soit l'intervalle $[0, e]$ peut être considéré comme une zone de risques. Au contraire, sur $[e, 1]$, elle se comporte comme une t-conorme, l'intervalle $[e, 1]$ est donc une zone d'opportunités. La valeur e correspond donc à un niveau d'optimisme du décideur.

Afin de regarder ses opportunités, un décideur peut utiliser l'Uninorme R_* définie dans [2] de la façon suivante: soit $\mathbf{S}$ un ensemble fini de scénarios et $F(x, s)$ la fonction d'évaluation d'un vecteur de décision x pour un scénario $s \in \mathbf{S}$:

$$R_*(F(x,s),e) = \begin{cases} \min_{s\in\mathbf{S}} F(x,s) & \textbf{si } F(x,s) < e \ \forall\ s\ \in \mathbf{S} \\ \max_{s\in\mathbf{S}} F(x,s) & \textbf{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

La valeur ajoutée de l'Uninorme est la possibilité de choisir un degré d'optimisme à partir duquel les solutions ne sont plus agrégées de la même manière : c'est une approche bipolaire de la résolution.

3 Description du problème et algorithme de résolution

Soit c_s le vecteur des coefficients de coûts selon le scénario $s \in \mathbf{S}$, soit A la matrice des contraintes et b un vecteur de constantes. On considère le PL suivant :

$$\max R_*(F(x,s),e) = \max R_*(\sum_{i=1}^{N} c_{i,s}x_i, e) \quad S.t \quad Ax \leq b \tag{2}$$

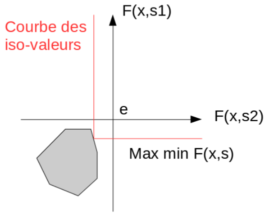

FIG. 1: Polyèdre des valeurs possibles des fonctions objectives (|S|=2) cas 1

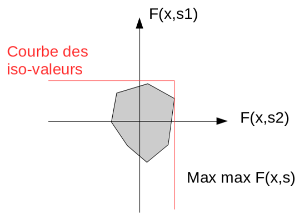

FIG. 2: Polyèdre des valeurs possibles des fonctions objectives (|S|=2) cas 2

En observant les polyèdres de solutions, il devient possible de définir un algorithme de résolution simple avec le critère Uninorme R_*.

$$\max H \ \mathbf{s.t.} \ Ax \leq b\mathbf{,} \ H \leq F(x,s) \ \forall \ s \ \in \mathbf{S} \tag{3}$$

$$\max F(x,s') \ \mathbf{s.t.} \ Ax \leq b\mathbf{,} \ F(x,s) \geq e \ \forall \ s \ \in \mathbf{S} \tag{4}$$

1. 1ère étape : On résout le modèle (3):
   Si la solution trouvée $H < e$ alors l'algorithme s'arrête et retourne la solution optimale qui est la solution finale. (voir FIG.1)
   Si la solution $H \geq e$ alors on passe à la deuxième étape de l'algorithme. (voir FIG.2)

2. 2ème étape : $\forall \ s' \in \mathbf{S}$ On résout le modèle (4):
   La solution optimale est la solution $x^{op} = x^{s'}$ telle que $s' = argmax_{s \in \mathbf{S}} F(x^s, s)$ avec x^s la solution optimale du modèle (4) pour le sénario s.

Il est à noter que cet algorithme est polynomial, il résout au maximum $|\mathbf{S}| + 1$ PL.

4 Conclusions et perspectives

L'utilisation de l'Uninorme R_* comme critère d'agrégation prenant en compte l'optimisme du décideur et n'étant pas compensatoire a été étudiée pour la résolution d'un PL sous incertitude dans le cadre de scénarios de coût discrets. Nous avons montré que ce critère ne complexifie pas la résolution du problème. Pour aller plus loin, nous pourrions définir un modèle de résolution pour le cas où les scénarios sont continus.

References

[1] L. Hurwicz *Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance.* Cowles commission papers 370, 1951.

[2] R. R. Yager, A. Rybalov. *Uninorm aggregation operators.* Fuzzy sets and systems, 1996, vol. 80, no 1, p. 111-120.

[3] R. R. Yager. *Generalized OWA aggregation operators.* Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, vol. 3, no 1, p. 93-107.