Revue économique

# Information imparfaite et rationalité collective

Monsieur Jean-Jacques Laffont

**Abstract**

Collective rationality under incomplete information

Jean-Jacques Laffont

This paper discusses a notion of collective rationality when information is decentralized. It is claimed that the collective decision maker must elicit in an incentive compatible way the information privately own if he wants to use it. The concept of incentive compatible Pareto optimum is then illustrated in an example which analyses the normative properties of price revealing rational expectations equilibria.

**Résumé**

Cette note propose une notion de rationalité collective lorsque dans un système économique l'information est décentralisée. Il est postulé que l'agent collectif décideur doit obtenir de façon incitative cette information détenue privativement s'il veut l'utiliser. Le concept d'optimum de Pareto incitatif est ensuite illustré dans un exemple qui analyse les propriétés normatives de l'équilibre à anticipations rationnelles qui transmet de l'information par les prix.

# INFORMATION IMPARFAITE ET RATIONALITÉ COLLECTIVE *

En information parfaite et en l'absence de coûts de transaction, les contraintes auxquelles doit faire face tout système économique peuvent être résumées par la donnée des ensembles de production et des égalités emplois ressources. La rationalité collective exige donc la maximisation du critère collectif sous ces contraintes. On est ainsi conduit, si le critère collectif est le préordre de Pareto, à la notion d'optimum de Pareto (O P).

Lorsque l'information est imparfaite et décentralisée, certains agents possédant une information pertinente pour la société, il n'est plus possible de se satisfaire de la notion d'optimum de Pareto. L'agent collectif décideur doit en effet acquérir l'information décentralisée ou ne pas s'en servir. La logique néoclassique conduit à postuler que les agents qui détiennent de l'information privative ne la révèleront que si cela est dans leur intérêt. La rationalité collective consiste donc à maximiser le critère social sous les contraintes techniques habituelles mais aussi sous les contraintes de la décentralisation de l'information. Si le critère social est le critère de Pareto, on est ainsi conduit à la notion d'optimum de Pareto incitatif (OPI).

Dans une première section, nous montrons comment la théorie des incitations permet de formuler de façon précise la notion de rationalité collective OPI. Un exemple illustratif est développé dans la section 2.

* Cette étude a bénéficié du soutien du contrat du Plan 3312 MDPE 009.

## RATIONALITE COLLECTIVE EN INFORMATION IMPARFAITE

### Un modèle d'économie d'échange avec information décentralisée

Considérons un continuum de consommateurs identifié avec l'intervalle [0,1] muni de la mesure de Lebesgue [1].

Nous allons distinguer trois dates :

| date 0 | date 1 | date 2 |
|---|---|---|
| *ex ante* | intérim | *ex post* |

A la date 0, *ex ante*, K variables aléatoires à valeurs réelles $(\theta_1, ..., \theta_K)$ sont tirées ; les valeurs prises par ces variables aléatoires sont observées par tous les agents à la date 2, *ex post*. La consommation a lieu à la date 2.

A la date 1, intérim, chaque consommateur observe des signaux non biaisés de $\theta_1, ..., \theta_K$ :

$$\eta^i_k = \theta_k + \varepsilon^i_k \qquad k = 1, ..., K.$$

Les variables aléatoires $(\varepsilon^i_k)$ sont de moyennes nulles et indépendantes.

Soit $\eta^i = (\eta^i_1, ..., \eta^i_K)$ et soit $\eta$ un profil de signaux.

Il y a L biens de consommation et chaque agent $i$ a un ensemble de consommation $X^i \equiv R^L_+$. La fonction d'utilité *ex post* de l'agent $i$ dépend de son vecteur de consommation $x^i \in R^L_+$, des signaux qu'il observe $\eta^i$, et du vecteur $\theta = (\theta_1, ..., \theta_K)$ :

$$U^i\ (x^i,\ \eta^i,\ \theta)\ ;$$

$U^i$ est supposée concave et strictement croissante en $x^i$.

Par la loi des grands nombres, $\theta = \int_0^1 \eta^j\, d\, j \ \forall\ \eta$. Par conséquent, $\theta$ peut être considéré comme la moyenne des vrais signaux observés

1. L'utilisation d'un continuum soulève un certain nombre de problèmes techniques délicats que l'on négligera dans cet exposé centré sur la notion d'OPI.

par les autres consommateurs. Utilisons un ^ pour identifier les vraies valeurs. La fonction d'utilité de l'agent $i$ s'écrit donc $U^i\,(x^i,\ \hat{\eta}^i,\ \hat{\theta})$. Soit, enfin, $\omega^i \in \overset{0}{\mathbb{R}}{}^{L}_{+}$ les ressources initiales du consommateur $i$.

Considérons tout d'abord le cas où les signaux de tous les agents sont sans bruit, de sorte que tous les agents observent $\theta$ à la date 1. Il n'y a plus de différence entre les dates 1 et 2 que nous appellerons la date *ex post*.

L'ensemble des allocations (physiquement) réalisables est

$$A = \{x^i\,(\hat{\theta}) : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^L{}_{+},\ i \in I \ / \int_0^1 x^i\,(\hat{\theta})\, d\,i = \int_0^1 \omega^i\, d\,i\}\,.$$

Une allocation peut être jugée soit à la date 0, soit à la date 1. Soit $\lambda\,(i)$ des poids tels que $\lambda\,(i) > 0$ et $\int_0^1 \lambda\,(i)\; d\,i = 1$.

A la date 1, nous dirons qu'une allocation $\{x^{*i}\,(.)\}_{i \in I}$ est *Pareto optimale ex post* si $\hat{\forall}\ \theta$ elle maximise dans A :

$$(1) \qquad \int_0^1 \lambda\,(i)\ U^i\,(x^i,\ \hat{\theta},\ \hat{\theta})\ d\,i\,.$$

Si, à la date 1, un système de L marchés concurrentiels est mis en place, nous savons que tout équilibre concurrentiel est Pareto optimal *ex post*.

A la date 0, les agents évaluent leurs perspectives de consommation en utilisant le critère de l'espérance de l'utilité où $U^i\,(x^i,\ \theta,\ \theta)$ est leur fonction d'utilité de von Neumann et $\pi\,(\theta)$ leur mesure (strictement positive) de probabilité a priori sur les valeurs de $\theta$.

Une allocation $\{x^{*i}\,(.)\}_{i \in I}$ est *Pareto optimale ex ante* si elle maximise dans A :

$$(2) \qquad \int_0^1 \lambda\,(i)\ \{\int_{\mathbb{R}^K} U^i\,(x^i\,(\theta),\ \theta,\ \theta)\ d\ \pi\,(\theta)\}\ d\,i\,.$$

Nous savons d'après la théorie Arrow Debreu que si, à la date 0, L marchés pour chaque valeur de $\theta$ sont mis en place, un équilibre concurrentiel avec cette structure de marchés est *ex ante* Pareto optimal.

Il est clair que, si l'on se restreint comme on le fera ici aux allocations différentiables par morceaux, Pareto optimalité *ex ante* entraîne Pareto optimalité *ex post*. Supposons en effet qu'une allocation ne soit pas Pareto optimale pour un intervalle de valeurs de $\theta$. Une amélioration de l'allocation pour ces valeurs conduit immédiatement à une amélioration en valeur espérée, puisque les contraintes définies par A sont indépendantes pour des valeurs différentes de $\theta$.

Il est raisonnable de supposer que le décideur collectif a la même information que tous les agents aux dates 0 et 1. La rationalité collective envisagée à la date 0 (1) exige donc la réalisation d'un optimum de Pareto *ex ante* (*ex post*).

Il faut noter qu'ici tout agent de l'économie peut se rendre compte si une allocation est Pareto optimale (*ex ante* ou *ex post*). Tout agent peut jouer, dans l'esprit du théorème de Coase, le rôle d'un décideur collectif. Ces concepts d'efficacité peuvent donc être envisagés sur le plan positif comme sur le plan normatif.

### Structures d'information différentes

Supposons maintenant que les signaux ne soient pas parfaits. Si on se restreint aux allocations que nous qualifierons d'anonymes, c'est-à-dire de la forme $x^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})$, les définitions ci-dessus sont facilement adaptées.

L'ensemble des allocations (physiquement) réalisables est :

$$A = \{x^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}) : \mathbb{R}^K x\ \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^L_+ \,;\, i \in I \,/\, \int_0^1 x^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})\, d\,i = \int_0^1 \omega^i\, d\,i\}\,.$$

A la date 0, l'agent $i$ a des anticipations $\pi^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})$ sur les valeurs futures de $\hat{\eta}^i$ et $\hat{\theta}$. Le critère qui permet de définir l'optimalité paretienne *ex ante* est :

$$(3) \qquad \int_0^1 \lambda\,(i) \int_{\mathbb{R}^{2K}} U^i\,(x^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}), \hat{\eta}^i, \theta)\; d\,\pi^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})\; d\,i\,.$$

*Ex post,* l'agent $i$ a observé $\hat{\eta}^i$ et $\hat{\theta}$ ; le critère qui permet de définir l'optimalité paretienne *ex post* est :

$$(4) \qquad \int_0^1 \lambda\,(i)\; U^i\,(x^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}), \hat{\eta}^i, \hat{\theta})\; d\,i\,.$$

On dira qu'une allocation est Pareto optimale *ex post* si elle maximise (4) dans A pour tout $(\hat{\theta}, \hat{\eta})$.

A la date 1, l'agent $i$ a une probabilité conditionnelle sur $\hat{\theta}$ notée $\pi^i\,(\hat{\theta}/\hat{\eta}^i)$, de sorte que l'optimalité de Pareto intérim est définie à partir du critère :

$$(5) \qquad \int_0^1 \lambda\,(i) \int_{\mathbb{R}^K} U^i\,(x^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}),\ \hat{\eta}^i, \hat{\theta})\ d\ \pi^i\,(\hat{\theta}/\hat{\eta}^i)\ d\,i\,.$$

On dira qu'une allocation est Pareto optimale intérim si elle maximise (5) dans A pour tout $\eta$.

De façon évidente

P. O. *ex ante* $\Longrightarrow$ P. O. intérim $\Longrightarrow$ P. O. *ex post*.

En présentant ces définitions, nous avons fait comme si les $\eta^i$ étaient connus du décideur collectif jugeant de l'optimalité de l'allocation. Or, que ce soit un agent central ou un individu, il n'a pas a priori connaissance de $\eta$.

Ces allocations ne sont donc pas vraiment réalisables, à moins que les agents acceptent de transmettre leur information privée. La rationalité individuelle exige que ce soit dans leur intérêt de transmettre cette information. A côté des contraintes (techniques) de ressources, nous voyons apparaître la nécessité de respecter des contraintes « incitatives » pour définir un ensemble de réalisables « réaliste » [2].

Une fonction de choix social $f^i$ est une application $f^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})$ de $I\ x\ \mathbb{R}^K\ x\ \mathbb{R}^K$ dans $\mathbb{R}^L_+$, telle que

$$f^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}) \in \mathbb{R}^L_+\ \forall\ i \in I\ \forall\ \hat{\eta}^i \in \mathbb{R}^K,\ \forall\ \hat{\theta} \in \mathbb{R}^K,$$

$$\int_0^1 f^i\,(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})\ d\,i = \int_0^1 \omega^i\ d\,i\ \forall\ \hat{\eta}\ \forall\ \hat{\theta} \in \mathbb{R}^K.$$

Une fonction de choix social spécifie une règle d'allocation à la date 1 comme si l'information décentralisée était connue. Dans le langage précédent, c'est une allocation physiquement réalisable.

Un mécanisme révélateur direct (anonyme) est une application $x^i\,(\eta^i, \theta)$ de $I\ x\ \mathbb{R}^K\ x\ \mathbb{R}^K$ dans $\mathbb{R}^L_+$, telle que

$$x^i\,(\eta^i\ \theta) \in \mathbb{R}^L_+\ \forall\ i \in I\ \forall\ \eta^i \in \mathbb{R}^K\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}^K,$$

$$\int_0^1 x^i\,(\eta^i, \theta)\ d\,i = \int_0^1 \omega^i\ d\,i\ \forall\ \eta\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}^K.$$

2. Voir Laffont [1981], chap. 5, pour une introduction à la théorie générale des incitations.

$x^i(\eta^i, \theta)$ spécifie pour chaque signal *annoncé* par l'agent $i$ et chaque moyenne de signaux *annoncés* par les autres agents un vecteur de consommation réalisable pour le consommateur $i$ et socialement.

La fonction de choix social, $(f^i)$ $i \in$ I, est concrétisée en stratégie dominant-Nash [3] par le mécanisme révélateur direct $(x^i)$ $i \in$ I, si

$$a) \qquad f^i(\eta^i\, \theta) = x^i(\eta^i, \theta) \qquad \forall\, \eta^i\ \forall\, \theta \quad \forall\, i \in I$$

$$b) \qquad \hat{\eta}^i \text{ maximise } U^i(x^i(\eta^i, \hat{\theta}), \hat{\eta}^i, \hat{\theta})$$

$$\text{pour tout } \hat{\theta} \in \mathbb{R}^K, \hat{\eta}^i \in \mathbb{R}^K$$

Quelles que soient les vraies caractéristiques des autres, si l'agent suppose qu'ils annoncent la vérité, la révélation de la vérité est pour lui la meilleure stratégie.

Si on adopte le concept de solution ci-dessus, l'ensemble des allocations réalisables à la date 1 est l'ensemble des fonctions de choix social concrétisables en stratégies dominant-Nash. Il est implicitement supposé que le décideur collectif n'a aucune information et doit l'obtenir par des mécanismes incitatifs s'il veut pouvoir baser l'allocation sur cette information privée.

D'où la définition formelle de l'ensemble des allocations incitativement réalisables :

$$\tilde{A} = \{x^i(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}) : \mathbb{R}^K x \ \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^L_+,\ i \in I \,/\, \int_0^1 x^i(\hat{\eta}^i, \hat{\theta})\, d\,i = \int_0^1 \omega^i\, d\,i\ \forall\, \eta \,\forall\, \theta$$

$$\text{et } \forall\, i \in I,\ \hat{\eta}^i \max U^i(x^i(\eta^i, \hat{\theta}), \hat{\eta}^i, \hat{\theta}) \text{ pour tout } \hat{\theta} \in \mathbb{R}^K, \hat{\eta}^i \in \mathbb{R}^K.$$

La vraie rationalité collective doit donc se juger par rapport aux notions d'efficacité définies sur $\tilde{A}$.

Nous dirons qu'une allocation, $\{x^{*i}(.)\}$ $i \in$ I, est *incitativement Pareto optimale* (IPO) — *ex ante*, intérim, *ex post* si elle maximise les critères (3), (4) $\forall\, \hat{\eta}$, (5) $\forall\, \hat{\eta}$, $\forall\, \hat{\theta}$ respectivement dans $\tilde{A}$.

Il est clair que

$$\text{IPO } \textit{ex ante} \Longrightarrow \text{IPO intérim} \Longrightarrow \text{IPO } \textit{ex post}.$$

3. Voir Laffont [1983] [1984] pour une justification de ce concept de solution.

Il est important d'observer que les visions positive et normative diffèrent en information imparfaite. Implicitement, nous avons ci-dessus pris la position d'un agent central qui n'a aucune information et ceci semble la seule façon pour adopter un point de vue normatif. Or, dans l'économie, chaque agent a des éléments d'information privée qui peuvent éventuellement lui permettre de proposer une allocation préférée par tous, conditionnellement à cette information. Noter que les autres agents en acceptant ou non cette proposition peuvent déduire une certaine information de la proposition même. Les choses deviennent donc fort complexes lorsque, après avoir reçu leur information privée, les agents peuvent redéfinir des règles de décision [4].

Considérons le mécanisme particulier suivant : à la date 1, L marchés sont organisés. Comme les prix reflètent l'information privée, nous nous intéressons à une notion robuste d'équilibre.

*Un équilibre à anticipations rationnelles totalement révélateur* est un système de prix $p^*(\theta) \gg 0$ de $\mathbb{R}^K$ dans $R^L$ tel que $p(.)$ soit biunivoque et que :

$$\int_0^1 x^i(\hat{\eta}^i, \hat{\theta}, p^*(\hat{\theta}))\, di = \int_0^1 \omega^i\, di \qquad \forall\, \hat{\eta}^i, \ \forall\, \hat{\theta},$$

où les fonctions de demande $x^i(.)$ sont obtenues à partir du programme

$$\text{Max } U^i(x^i, \hat{\eta}^i, \hat{\theta}),$$

$$p^*(\hat{\theta})(x^i - \omega^i) = 0,$$

$$x^i \in \mathbb{R}^L_+ .$$

L'agent infère la valeur $\hat{\theta}$ de l'observation des prix et maximise donc son utilité en connaissant $\hat{\eta}^i$ et $\hat{\theta}$.

Considérons $x^i(\eta^i, \theta, p^*(\theta))$ comme un mécanisme dans lequel on demande à l'agent de révéler son signal en lui annonçant qu'on calculera les prix $p^*(\theta)$ sur la base des réponses moyennes et qu'on lui donnera son meilleur panier de biens pour la fonction d'utilité $U^i(x^i, \eta^i, \theta)$ sous la contrainte budgétaire $p^*(\theta)(x^i - \omega^i) = 0$.

4. Voir Myerson [1981], Holmstrom et Myerson [1981].

Il est alors clair qu'un équilibre à anticipations rationnelles totalement révélateur, s'il existe, est concrétisable en équilibres dominant Nash. Il appartient donc à $\widetilde{A}$. De plus, on peut affirmer qu'il est PO *ex post* ; il est donc IPO *ex post*.

Dans la section suivante, nous montrons sur un exemple qu'il n'est ni IPO *ex ante* ni IPO intérim.

## UN EXEMPLE

Considérons une économie d'échange constituée de deux types d'agents, un continuum [0,1] d'agents de type 1 et un continuum [0,1] d'agents de type 2 munis de la mesure de Lebesgue.

L'économie a deux biens et le bien 1 est utilisé comme numéraire.

Les agents de type 1 sont informés de la valeur d'un paramètre $\hat{\theta}$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle [1,2] selon une loi uniforme [5]. La fonction d'utilité de von Neumann d'un agent $i$ de type 1 est :

$$x^{i1}{}_1 + \hat{\theta} \log x^{i1}{}_2$$

où $x^{i1}{}_l$ est sa consommation en bien $l$, $l = 1{,}2$. Ses ressources initiales sont (1,1).

Les agents de type 2 ne sont pas informés de la valeur prise par $\hat{\theta}$. Un agent $i$ de type 2 a une fonction d'utilité de von Neumann :

$$\log x^{i2}{}_1 + \hat{\theta} \log x^{i2}{}_2 ,$$

où $x^{i2}{}_l$ est la consommation en bien $l$, $l = 1{,}2$. Ses ressources initiales sont (2,1).

Supposons, tout d'abord, que les deux types d'agents soient informés. L'ensemble des allocations réalisables [6] à la date 0 est défini par les fonctions

$$x^{i1}{}_1 (\hat{\theta}),\ x^{i1}{}_2 (\hat{\theta}),\ x^{i2}{}_1 (\hat{\theta}),\ x^{i2}{}_2 (\hat{\theta}) ;$$

5. Les agents informés ont ici une information parfaite, c'est-à-dire Var $\varepsilon^i \equiv 0$.
6. Nous nous intéressons uniquement aux allocations symétriques.

telles que :

(6) $$\int_0^1 x^{i1}_1 (\hat{\theta})\, d\, i + \int_0^1 x^{i2}_1 (\hat{\theta})\, d\, i = 3 \qquad \forall\ \hat{\theta}\,,$$

(7) $$\int_0^1 x^{i1}_2 (\hat{\theta})\, d\, i + \int_0^1 x^{i2}_2 (\hat{\theta})\, d\, i = 2 \qquad \forall\ \hat{\theta}\,,$$

(8) $$x^{i1}_1 (\hat{\theta}) \geqslant 0\ x^{i1}_2 (\hat{\theta}) \geqslant 0\ x^{i2}_1 (\hat{\theta}) \geqslant 0\ x^{i2}_2 (\hat{\theta}) \geqslant 0\,,$$

$$A = \{x^{i1}_1 (.),\ x^{i1}_2 (.),\ x^{i2}_1 (.),\ x^{i2}_2 (.),\ i \in [0,\ 1]\ /\ (6)\ (7)\ (8)\}\,.$$

Une allocation est Pareto optimale *ex ante* si elle est solution du programme.

(I) $$\text{Max}\ \lambda \int_0^1 \left(\int_1^2 U^{i1}\ (x^{i1}_1\ (\hat{\theta}),\ x^{i1}_2\ (\hat{\theta}),\ \hat{\theta})\ d\,\hat{\theta}\right)\, d\, i$$
$$+\ (1 - \lambda) \int_0^1 \left(\int_1^2 U^{i2}\ (x^{i2}_1\ (\hat{\theta}),\ x^{i2}_2\ (\hat{\theta})\ \hat{\theta})\ d\,\hat{\theta}\right)\, d\, i$$

T.Q. (6) (7) (8).

D'après la théorie Arrow-Debreu, nous savons qu'un équilibre concurrentiel avec marchés contingents est Pareto optimal.

Dans un tel équilibre, à la date 0, l'agent *i* de type *r* définit son plan contingent de consommation en résolvant le programme :

$$\text{Max} \int_1^2 U^{ir}\ (x^{ir}\ (\hat{\theta}),\ x^{ir}_2\ (\hat{\theta}),\ \hat{\theta})\ d\,\hat{\theta}\,,$$

$$\int_1^2 p_1\ (\hat{\theta})\ (x^{ir}_1\ (\hat{\theta}) - \omega^i_1)\ d\,\hat{\theta} + \int_1^2 p_2\ (\hat{\theta})\ (x^{ir}_2\ (\hat{\theta}) - \omega^i_2)\ d\,\hat{\theta} = 0\,.$$

Le système de prix de l'équilibre à la Arrow-Debreu est

$$p_1\ (\hat{\theta}) = 1\,,$$

$$p_2\ (\hat{\theta}) = \frac{7}{9}\ \hat{\theta}\,,$$

avec l'allocation correspondante

$$x^1_1(\hat{\theta}) = \frac{10}{7}\ x^1_2(\hat{\theta}) = \frac{7}{9},$$

$$x^2_1(\hat{\theta}) = \frac{11}{7}\ x^2_2(\hat{\theta}) = \frac{11}{9}.$$

En particulier, on observe qu'il y a assurance complète ; ceci est possible car il n'existe pas d'aléa macro-économique dans ce modèle.

Le niveau d'utilité espéré d'un agent de type

$$1 \text{ est } \bar{U}^1_{AD} = 1{,}0516\,,$$

$$2 \qquad \bar{U}^2_{AD} = 0{,}7529\,.$$

Supposons maintenant qu'un système complet de marchés à la Arrow-Debreu n'ait pas été mis en place et considérons l'équilibre à anticipations rationnelles totalement révélateur :

$$p_1 = 1\ p_2(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}(3 + \hat{\theta})}{2 + \hat{\theta}},$$

$$x^1_1(\hat{\theta}) = \frac{2\hat{\theta} + 2}{\hat{\theta} + 2}\ x^2_1(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta} + 2}{\hat{\theta} + 3},$$

$$x^1_2(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta} + 4}{\hat{\theta} + 2}\ x^2_2(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta} + 4}{\hat{\theta} + 3}.$$

$$\bar{U}^1_{ER} = 1{,}0509\,,$$

$$\bar{U}^2_{ER} = 0{,}7526\,.$$

On peut améliorer cette allocation au sens *ex ante* avec un mécanisme à stratégie dominante mis en place à la date 1.

Un mécanisme $x^1_1(\theta)$, $x^1_2(\theta)$ conduira l'agent de type 1 à annoncer sa vraie observation de $\theta$ si [7]

$$\frac{d\,x^1_1}{d\,\theta} + \frac{\theta}{x^1_2(\theta)}\frac{d\,x^1_2}{d\,\theta}(\theta) = 0\,, \tag{9}$$

et

$$\frac{d\,x^1_2}{d\,\theta}(\theta) \geqslant 0\,. \tag{10}$$

7. Voir Laffont [1981] pour un exposé de l'approche différentielle.

On peut choisir en particulier $x'_2(\theta) = \dfrac{\theta + 2}{\theta + 3}$, c'est-à-dire l'allocation en bien 2 correspondant à l'équilibre à anticipations rationnelles. D'après (9),

$$x^1_1(\theta) = -\int_1^\theta \frac{t}{(2+t)\quad(3+t)}\,dt + \mathrm{K}\,.$$

K peut être choisi de manière à ce que l'agent 1 ait le même niveau d'utilité espéré que dans l'équilibre à anticipations rationnelles, soit :

$$\mathrm{K} = \int_1^2 \int_1^\theta \frac{t}{(2+t)\quad(3+t)}\,dt\,d\theta + \int_1^2 \frac{2\,\theta + 2}{\theta + 2}\,d\theta = 1{,}470\,.$$

Il reste pour l'agent de type 2 en bien 1

$$3 - x^1_1(\theta) = 1{,}530 + \int_1^\theta \frac{t}{(2+t)\quad(3+t)}\,dt\,,$$

d'où un niveau d'utilité espéré avec le mécanisme

$$\bar{U}^1_M = 1{,}0509\,,$$

$$\bar{U}^1_M = \int_1^2 \log\left(1{,}530 + \int_1^\theta \frac{t}{(2+t)\quad(3+t)}\,dt\right)d\theta + \int_1^2 \theta \log \frac{\theta+4}{\theta+3}\,d\theta$$

$$= \int_1^2 \log\left[1{,}530 + 3\log\frac{\theta+3}{4} - 2\log\frac{\theta+2}{3}\right]d\theta$$

$$+ \int_1^2 \theta \log \frac{\theta+4}{\theta+3}\,d\theta = 0{,}7530\,.$$

L'équilibre à anticipations rationnelles n'est pas IPO au sens *ex ante*. Montrons qu'il n'est pas IPO au sens intérim. Supposons pour cela qu'une proportion $\mu$ seulement d'agents de type 1 sont informés. Quelle que soit $\mu \neq 0$, ceci ne change pas l'équilibre à anticipations rationnelles totalement révélateur. Pour montrer que cet équilibre n'est pas IPO intérim, il faut construire un mécanisme qui améliore l'utilité de chaque agent à la date 1, c'est-à-dire pour chaque valeur de $\theta$ pour chacun des agents informés de la date 1, et au sens *ex ante* pour la proportion $(1 - \mu)$ d'agents de type 1 et pour les agents de type 2.

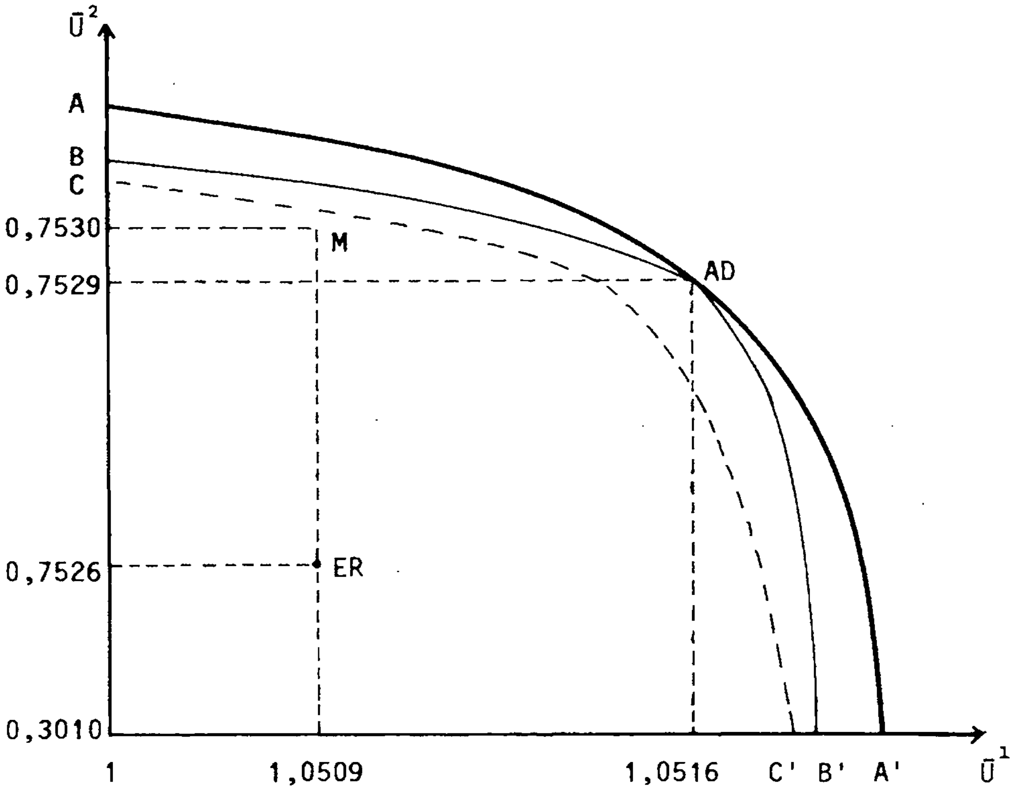
Ajoutons à l'allocation précédente de bien 1 des agents de type 1 informés $\tilde{\delta}$, tel que :

$$1{,}470 - \int_1^\theta \frac{t}{(2+t)\quad(3+t)}\,dt + \tilde{\delta} > \frac{2\,\theta+2}{\theta+2}$$

pour $\theta \in [1{,}2]$.

La quantité globale de bien 1 nécessaire est $\mu\,\tilde{\delta}$. Puisqu'il était possible d'améliorer strictement le bien-être *ex ante* des agents de type 2, on peut leur retirer une quantité $\tau$ de bien 1 et encore améliorer leur bien-être. Pour atteindre notre objectif, il suffit donc de prendre $\mu$ assez petit pour que $\mu\,\tilde{\delta} = \tau$.

Intuitivement, les équilibres révélateurs peuvent révéler trop d'information et éliminer ainsi des possibilités d'assurance qui peuvent exister lorsqu'un système complet de marchés à la Arrow-Debreu n'était pas disponible avant l'avènement de l'information privée. Des mécanismes incitatifs qui améliorent le bien social au sens intérim (et donc *ex ante*) peuvent être construits. Les résultats de l'exemple sont rassemblés sur le graphique symbolique suivant.



Noter qu'il peut être légitime d'ajouter comme contrainte d'un mécanisme l'incitation à la participation au sens que l'allocation obtenue est préférable à la ressource initiale pour chaque valeur de $\theta$. On dira que l'allocation est incitative avec participation.

On remarque alors que l'allocation correspondant à l'équilibre Arrow-Debreu est incitative (parce que constante) au sens ci-dessus mais pas préférée à l'allocation initiale (2,1) pour tout $\theta$.

Par contre, l'allocation construite par le mécanisme ci-dessus est bien incitativement réalisable avec participation puisque préférable à l'équilibre à anticipations rationnelles.

AA′ : frontière des réalisables physiquement,
BB′ : frontières des réalisables physiquement et incitativement,
CC′ : frontière des réalisables physiquement incitativement avec participation.

AD : équilibre Arrow-Debreu,
ER : équilibre à anticipations rationnelles.
M : allocation du mécanisme.

L'allocation correspondant au mécanisme, M, est incitativement réalisable mais probablement pas sur la frontière BB′ ou CC′, car nous avons choisi l'allocation de bien 2 sans chercher à l'optimiser. Un point de la frontière BB′ serait obtenu en résolvant le programme (I) sous les contraintes additionnelles (9) et (10). Pour obtenir CC′, il faudrait ajouter les contraintes

$$U^i\left(x^i\left(\theta, \eta^{i}_{\cdot}, \theta\right)\right) \geqslant U^i\left(\omega^i, \theta\right) \quad \forall\, i, \quad \forall\, \theta .$$

*Septembre 1983*

Jean-Jacques LAFFONT

## *BIBLIOGRAPHIE*


[1981] LAFFONT J.-J., *Cours de théorie micro-économique*. Vol. 1 : *Fondements de l'économie publique*, Economica, Paris.

[1984] LAFFONT J.-J., *Cours de théorie micro-économique*. Vol. 2 : *Economie de l'incertain et de l'information*, Economica, Paris.

[1983] LAFFONT J.-J., « On the welfare analysis of rational expectations equilibria with asymmetric information », *Walras-Bowley lecture*, Evanston, 1983, à paraître dans *Econometrica*.

[1981] MYERSON R. B., « Mechanism design by an informed principal », à paraître dans *Econometrica*.

[1981] HOLSTRÖM B., MYERSON R., « Efficient and durable decision rules with incomplete information », à paraître dans *Econometrica*.