La théorie économique de l'auto-protection

Monsieur Jean-Jacques Laffont

Résumé

L'objet de cette note est de prendre en compte le phénomène d'autoprotection dans une théorie des assurances d'équilibre général. Après avoir mis en évidence la possibilité d'inexistence de l'équilibre concurrentiel et son inefficacité très générale, lorsqu'il existe, nous étudions des politiques économiques susceptibles de rétablir l'optimalité parétienne : prime variable liée à l'activité d'autoprotection, prime variable liée à la quantité d'assurance sélectionnée, prime définie sur la base des déclarations de l'agent et contrôlée par une cour de justice, etc.

Abstract

The economic theory of self-protection

The purpose of this paper is to take info account self'protection in a general equilibrium theory of Insurance. First, we show why the competitive equilibrium may fait to exist and why it is in general Pareto inefficient, when it cxists. Then, we study a number of economic policies designed to restore Pareto efficiency : Insurance premium variable with the level of self~protection, with the quantity of Insurance, Insurance premium defined on the basis of the agent's declarations, etc.

LA THEORIE ECONOMIQUE DE L'AUTO-PROTECTION [1]

La théorie économique des assurances a tout d'abord pour objet d'analyser le comportement des compagnies d'assurance et le comportement des autres agents économiques face aux contrats proposés par les compagnies. Au-delà de cette étude microéconomique, il est important de se poser aussi des questions macroéconomiques. Est-ce que tel système d'assurances réalise une bonne allocation des risques ? Est-ce que cette allocation est stable, au sens qu'elle n'incite pas l'entrée de nouveaux agents sur le marché des assurances ? Est-elle optimale au sens de Pareto ? Sinon, pourquoi et quelles politiques économiques peuvent y remédier ?

Si les études microéconomiques répondant aux problèmes que se posent les compagnies d'assurance dans la gestion de leurs affaires ont été nombreuses, les études d'équilibre général, qui ont un fort contenu normatif, sont beaucoup plus rares. Une raison importante de cette lacune est que l'introduction des assurances dans la théorie de l'équilibre général pose des problèmes nouveaux, liés en particulier à l'asymétrie « informationnelle » existant entre les compagnies d'assurance et leurs assurés ; or, la théorie économique commence à peine à aborder les problèmes liés à l'information. La difficulté fondamentale est que les compagnies d'assurance ne connaissent pas parfaitement les risques qu'elles assurent et que les agents économiques, qui souvent les connaissent mieux que les compagnies, peuvent en outre les modifier par leur comportement.

Pour progresser dans la compréhension de ces phénomènes, il est bon de considérer des situations extrêmes, comme le cas où les agents

1. Une partie de cette note représente une révision d'un article commun avec E. Helpman [12]. Je tiens à remercier chaleureusement le Département de l'Education du Québec et le Département d'Economie de l'Université de Montréal qui en a permis la réalisation. Une version préliminaire a circulé comme Cahier n° 7503, Département de Sciences économiques, Université de Montréal

sont différents quant à leurs risques, mais ne peuvent pas les changer, ou bien le cas où ils sont identiques quant aux risques mais différents quant à leurs préférences certaines, ou bien le cas où ils sont identiques mais se différencient par leur comportement, etc. Autant de sujets de recherche dont l'étude approfondie constitue les premiers pas dans la construction d'une théorie de l'équilibre général avec les compagnies d'assurance.

L'objectif de cette note est d'analyser en détail un des cas extrêmes mentionnés ci-dessus, en espérant susciter des recherches analogues pour avancer vers une synthèse qui prenne en compte simultanément les diverses difficultés. Le cas étudié ici correspond à une économie où tous les consommateurs sont identiques quant à leurs risques fondamentaux, et où ils peuvent par certaines de leurs activités influencer ces risques et éventuellement se différencier. Dans un section préliminaire, nous introduisons un vocabulaire qui nous sera utile pour présenter rapidement les travaux existants et pour définir plus précisément notre sujet.

1. PRÉLIMINAIRES

Afin d'introduire quelques définitions, considérons tout d'abord un modèle simplifié. Soit un agent économique qui peut se trouver dans deux états (de santé) à la fin de la période envisagée. Dans l'état 1 (bonne santé) il jouit d'un revenu R, alors que dans l'état 2 (mauvaise santé) son revenu n'est plus que $R - L$; L représente la perte de revenu due à sa mauvaise santé. Au début de la période, il peut s'assurer et payer une prime $P(z)$ pour recevoir z au cas où il serait dans l'état 2. Soit Π la probabilité qu'il soit dans l'état 1. Supposons de plus qu'il puisse, également au début de la période, influencer par l'achat de bien médical préventif x_0, la probabilité Π d'être dans l'état 1, ou (et) le montant de la perte L. Enfin, notons x_1 et x_2 les revenus consommés dans les états 1 et 2.

Si nous supposons que l'agent économique détermine son comportement par la maximation de l'espérance mathématique de son utilité, son programme s'écrit :

$$(1.1) \qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & \{\Pi(x_0)\, U_1(x_1) + (1 - \Pi(x_0))\, U_2(x_2)\} \\ \text{T.Q.} & x_0 + x_1 + P(z) \leqq R \\ & x_0 + x_2 + P(z) \leqq R - L(x_0) + z \\ & x_0,\ x_1,\ x_2,\ z \geqq 0 \end{array}$$

Nous dirons que x_0 représente une activité d'*auto-protection*, lorsque x_0 influence la probabilité Π.

Nous dirons que x_0 représente une activité d'*auto-assurance*, lorsque x_0 influence le montant de la perte L.

La *demande d'assurance* par l'agent est la solution en z du programme (1-1) ; elle devient une *indemnité* lorsque l'état 2 se réalise. La prime d'assurance qui lui correspond est alors P (z).

Le problème du *risque moral* (« *moral hazard* ») est l'effet de la disponibilité d'une assurance sur le montant d'auto-protection (ou d'auto-assurance).

Nous dirons qu'il y a un problème de *sélection adverse* lorsque, en face d'un prix d'assurance unique, il existe des agents avec des risques différents et seuls les agents avec les plus gros risques s'assurent.

La théorie économique des assurances a été inexistante jusqu'à l'utilisation, pour formaliser le comportement de l'assuré, du modèle d'espérance mathématique devenu très courant dans la théorie de l'incertain. De nombreux articles, Arrow [3], Borch [6], Gould [10], Mossin [18], Pashigian et *alii* [19], Smith [24], etc., ont alors développé la théorie de la demande individuelle d'assurance et posé le problème d'un système d'assurance optimal. Arrow [5] a récemment généralisé un grand nombre de résultats au cas de fonctions d'utilité dépendant des états. Arrow [4] a introduit dans la littérature économique le problème du risque moral défini ci-dessus, et a suscité une vive controverse sur la signification du phénomène (voir Pauly [20], Demsetz [8]). Ehrlich et Becker [9] ont considérablement clarifié le vocabulaire employé par les économistes, et étendu l'analyse de la demande au cas de l'auto-protection et de l'auto-assurance, tandis que Pauly [21], à la suite de Akerlof [1], a souligné le problème de sélection adverse, dû à des risques différents et non identifiables (voir aussi Rothschild et Stiglitz [23]).

Il est bien connu que le modèle d'équilibre général (Debreu [7], chap. 3-4-5) peut être réinterprété dans un environnement incertain, en associant à chaque état de la nature un marché pour chaque bien (Arrow [2], Debreu [7], chap. 6). Dans cette généralisation, les agents économiques ont des distributions de probabilité subjectives qui, avec leurs goûts, leurs ressources initiales et les prix, déterminent leur comportement. Sous les hypothèses classiques de convexité, l'équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto. Radner [22] a bien souligné que la propriété d'efficacité de ces équilibres doit se comprendre comme efficacité par rapport à une structure d'information donnée, c'est-à-dire efficacité *ex ante*.

La difficulté majeure de la solution Arrow-Debreu est le nombre prohibitif de marchés qu'elle requiert. Une tâche fondamentale de la théorie économique est donc l'étude d'économies pourvues d'un nombre restreint de marchés. Malinvaud [15] [18] a montré comment, avec des risques individuels, une économie décentralisée pouvait réaliser un optimum, avec seulement des marchés d'assurance. Dans cette note, nous présentons une analyse d'équilibre général du phénomène d'auto-protection (pour un modèle sans marchés futurs mais avec des marchés d'assurance) qui révèle plusieurs difficultés passées inaperçues dans l'analyse partielle contenue dans les contributions citées ci-dessus. Notre problème peut s'interpréter comme un cas particulier du problème général défini ci-dessus. Dans le modèle (1.1), il existe un seul marché d'assurances alors qu'il faudrait un marché pour chaque valeur de x_0, pour retrouver le modèle étudié par Malinvaud.

Dans la section 3, nous montrons comment l'auto-protection peut affecter l'existence de l'équilibre, c'est-à-dire le test le plus simple de cohérence logique du modèle. La section 4 explique pourquoi, en présence d'auto-protection, l'équilibre concurrentiel avec primes constantes est en général inefficace. Deux solutions sont envisagées dans la section 5, une prime variable et la taxation. Enfin, des exemples de solution de second rang sont développés dans la section 6.

2. DESCRIPTION DE L'ÉCONOMIE

Par souci de simplicité, nous considérons une économie d'échange dans laquelle consommateurs et compagnies d'assurance sont les seuls agents économiques.

A. Les consommateurs

Les consommateurs sont tous identiques et vivent deux périodes. La population croît au taux uniforme ρ. A chaque instant t, il y a des jeunes et des vieux consommateurs, et les jeunes sont $(1 + \rho)$ fois plus nombreux que les vieux. Soit N_t, le nombre de consommateurs à la date t.

Nous supposerons aussi qu'il n'existe qu'un seul bien de consommation. La généralisation du modèle à plusieurs biens et plusieurs types identifiables de consommateurs est immédiate.

Dans la première période de leur vie, les consommateurs ont une ressource initiale certaine w_0. Par contre, ils peuvent se trouver dans l'un des S états (de santé) possibles pendant la deuxième période. Soit w_s, $s = 1, ..., S$, la ressource initiale dans l'état s. En plus de procurer (éventuellement) des satisfactions, la consommation, pendant la première période, x_0, peut influencer les probabilités Π_s, $s = 1, ..., S$ des différents états. Par conséquent, $\Pi = \Pi_1, ..., \Pi_S)$ est une fonction définie sur R_+ à valeurs dans le simplexe de R^S. Le vecteur de consommation d'un agent type est noté : $x = (x_0, x_1, ..., x_S)$ où $x_s \in R$, $s = 1, ..., S$ est la consommation dans l'état s de la deuxième période.

HYPOTHÈSE 1. $w_s \geqq 0$, $s = 0, 1, ..., S$ avec au moins une inégalité stricte. Pour chaque consommateur, l'ensemble de consommation est dans chaque période R_+.

Il n'existe pas de marchés futurs, mais, dans la première période de sa vie, un consommateur peut s'assurer contre chaque état $s = 1, ..., S$. Au même prix [2], il peut aussi emprunter (s'assurer négativement) dans la première période avec obligation de remboursement dans la seconde période s'il est dans un certain état $s = 1, ..., S$. Ces transactions sont effectuées avec des compagnies d'assurance.

Soit z_s la quantité d'assurance contre l'état s achetée par un consommateur-type, soit q_s le prix d'une unité d'assurance contre l'état s (z_s peut être positif ou négatif) [3]. Notons $z = (z_1, ..., z_S)$ et $q = (q_1, ..., q_S)$.

HYPOTHÈSE 2. Les préférences du consommateur-type sont représentables par une fonction d'utilité $V(x)$ telle que :

$$V(x) = \sum_{s=1}^{S} \Pi_s(x_0) \cdot U_s(x_0, x_s)$$

où $\Pi_s(.)$ et $U_s(.,.)$ sont des fonctions continues pour $s = 1, ..., S$. De plus $U_s(.,.)$ est croissante en x_s, pour au moins un $s^* \in \{1, ..., S\}$.

2. L'hypothèse d'un seul prix pour des assurances positives et négatives doit être justifiée. Dans une analyse d'équilibre temporaire où les banqueroutes sont possibles, il faudrait tenir compte des risques de défaut et il existe une dissymétrie évidente entre un consommateur et une compagnie d'assurance qui, elle, bénéficie de la loi des grands nombres.

3. Un modèle plus réaliste mais plus complexe comporterait un marché de la monnaie où il est possible de s'endetter et des marchés d'assurances sur lesquels on ne peut s'assurer que positivement. Les résultats obtenus dans un tel modèle sont toutefois analogues à ceux présentés ici (voir Laffont [13]).

Nous pouvons maintenant formuler le programme d'optimation du jeune consommateur-type :

$$\text{(2.1)} \qquad \text{Max } V(x)$$

$$\text{T.Q. } x_0 \leqq w_0 - \sum_{s=1}^{S} q_s z_s$$

$$x_s \leqq w_s + z_s \qquad s = 1, ..., S$$

$$x_s \geqq 0 \qquad s = 0, ..., S$$

Les contraintes de ce programme peuvent être récrites :

$$\text{(2.2)} \qquad x_0 + \sum_{s=1}^{S} q_s x_s \leqq w_0 + \sum_{s=1}^{S} q_s w_s$$

$$x_s \geqq 0 \qquad s = 0, 1, ..., S \quad \text{avec} \quad z_s = x_s - w_s$$

Comme nous nous intéressons seulement aux équilibres stationnaires, c'est-à-dire aux équilibres pour lesquels les prix et quantités consommées sont constants au cours du temps, le comportement des consommateurs âgés se déduit également du programme ci-dessus.

Il est clair que pour pouvoir parler rigoureusement d'état stationnaire, il faut un nombre infini de consommateurs, de sorte que les fréquences s'identifient avec les probabilités et l'incertitude disparaisse au plan macroéconomique. Nous utiliserons dans notre modèle cette approximation. Une formalisation rigoureuse qui ne change rien ci-dessous est obtenue en représentant l'ensemble des agents par un continuum [0,1].

B. **Compagnies d'assurance**

Il existe des entreprises, appelées compagnies d'assurance, qui, au prix q_s, $s = 1, ..., S$, acceptent de satisfaire les demandes d'assurance des consommateurs décrites ci-dessus. La transaction est telle que la compagnie d'assurance reçoit d'un jeune consommateur $q_s z_s$ (ou lui prête) $q_s z_s$ si z_s est négatif et lui paie (ou reçoit de lui) z_s, s'il est dans l'état s lorsqu'il est âgé.

Nous serons amenés à faire différentes hypothèses sur les compagnies d'assurance.

HYPOTHÈSE 3. Il y a concurrence parfaite entre les compagnies d'assurance [4].

4. Dans cette hypothèse, nous requérons davantage que ce que l'on entend usuellement par concurrence parfaite. Plus précisément, lorsque le nombre de consommateurs tend vers l'infini, nous voulons que le nombre de consommateurs assurés par chaque compagnie sur chaque type de contrat tende aussi vers l'infini (ou soit zéro pour toutes les compagnies).

HYPOTHÈSE 3′. Il existe une seule compagnie d'assurance avec une contrainte institutionnelle de profit nul sur chaque type de contrat, c'est-à-dire chaque $s = 1, ..., S$.

HYPOTHÈSE 3″. Il existe une seule compagnie d'assurance avec une contrainte institutionnelle de profit global nul.

L'existence de compagnies d'assurance permet aux consommateurs de transférer conditionnellement du pouvoir d'achat de la période 1 à la période 2 de leur vie, et vice-versa. Des marchés futurs conditionnels pourraient procurer les mêmes possibilités, mais la structure des générations est telle que ces marchés ne peuvent apparaître [5].

Le modèle de l'économie étudiée étant bien défini, nous pouvons aborder le premier test de cohérence logique d'un modèle, à savoir la question de l'existence d'un équilibre. Il est intéressant d'observer que, malgré l'existence d'un continuum d'agents, la présence de non-convexités dans les fonctions d'utilité peut conduire à l'inexistence de l'équilibre.

3. EXISTENCE D'UN ÉQUILIBRE

Lorsqu'il existe plusieurs comportements, solutions du programme (2.1), nous permettons différents comportements pour des consommateurs identiques, de manière à donner la plus grande flexibilité possible au concept d'équilibre. Soit λ_a la proportion de consommateurs qui choisissent le vecteur de consommation x^a.

Soit Q, l'espace des prix : $Q = \{q/q \in R^{S+1},\ q_0 = 1,\ q_s \geqq 0,\ s = 1, ..., S\}$.

DÉFINITION. Un *équilibre fort* est un ensemble fini A, un ensemble de poids positifs λ_a, $a \in A$, tels que $\sum_{a \in A} \lambda_a = 1$, un vecteur de prix $\bar{q} \in Q$, un ensemble de vecteurs de consommation $\bar{x}^a = (x^a_0, ..., x^a_S)$, $a \in A$, tels que :

5. Une solution *partielle* serait la création de marchés futurs entre jeunes consommateurs. Ces marchés permettraient de réaliser un niveau d'utilité sûr pour la deuxième période, mais ne permettraient pas de transferts de ressources entre les périodes.

$$(3.1) \qquad (1+\rho) \sum_{a \in A} \lambda_a \, \bar{q}^s \, (\bar{x}^a{}_s - w_s) - \sum_{a \in A} \lambda_a \, \Pi_s \, (\bar{x}^a{}_0) \, (\bar{x}^a{}_s - w_s) = 0$$

pour $s = 1, ..., S$

$$(3.2) \qquad (1+\rho) \sum_{a \in A} \lambda_a \, (\bar{x}^a{}_0 - w_0) + \sum_{a \in A} \lambda_a \sum_{s=1}^{S} \Pi_s \, (\bar{x}^a{}_0) \, (\bar{x}^a{}_s - w_s) = 0$$

$$(3.3) \qquad \bar{x}^a = (\bar{x}^a{}_0, \bar{x}^a{}_1, ..., \bar{x}^a{}_S) \in \xi \, (q) = \{x^*/x^* \text{ est solution de } (2.1)\}$$

pour tout $a \in A$

La condition (3.1) exprime la nullité du profit avec probabilité un, sur chaque contrat $s = 1, ..., S$.

La condition (3.2) assure l'équilibre sur le marché du bien.

Enfin (3.3) dit que les consommateurs sont en équilibre.

Dans la définition d'un *équilibre faible*, la condition (3.1) est remplacée par :

$$(3.4) \qquad (1+\rho) \sum_{s=1}^{S} \sum_{a \in A} \lambda_a \, \bar{q}_s \, (\bar{x}^a{}_0 - w_s) - \sum_{s=1}^{S} \sum_{a \in A} \lambda_a \, \Pi_s \, (\bar{x}^a{}_0) \, (\bar{x}^a{}_s - w_s) = 0$$

Si A est réduit à un seul élément, tous les consommateurs ont le même comportement. Nous dirons que de tels équilibres sont uniformes.

L'équilibre uniforme fort est particulièrement intéressant, car il permet une concurrence totale entre les compagnies d'assurance. Si un équilibre n'est pas uniforme, on peut montrer (voir Rothschild et Stiglitz [23]) que l'équilibre peut être détruit si les compagnies se font concurrence sur des contrats prix-quantité [6]. De plus, si l'équilibre est faible (et non uniforme), les compagnies d'assurance peuvent facilement choisir le meilleur type de contrat pour détruire l'équilibre.

Ainsi, il apparaît que le concept d'équilibre uniforme est compatible avec la concurrence (hypothèse 3), alors que l'équilibre faible nécessite l'existence d'une seule compagnie d'assurance.

Pour démontrer l'existence d'un équilibre uniforme fort, il est nécessaire de faire deux hypothèses supplémentaires.

6. En effet, en raison de la multiplicité de comportements possibles pour des consommateurs identiques, il peut se poser à l'équilibre un problème de sélection adverse, puisque des consommations différentes de bien préventif conduisent à des risques différents. Toutefois, par hypothèse, les compagnies d'assurance ne peuvent pas observer ces risques. Notons néanmoins que les consommateurs sont amenés à acheter des quantités différentes d'assurance et que les agents qui ont les plus faibles risques ont une incitation à signaler leur différence.

HYPOTHÈSE 3. $\underset{x>0}{\mathrm{Min}}\ \Pi_s(x) \geqq \Pi > 0$ pour $s = 1, ..., S$.

Soit $I = \left[\frac{\Pi}{1+\rho}, 1 - \Pi\right]$

Cette hypothèse est une façon simple d'éviter des problèmes techniques du type du paradoxe de St-Petersbourg.

HYPOTHÈSE 4. $V(x)$ est quasi concave.

Il est remarquable qu'une telle hypothèse soit nécessaire malgré le nombre infini de consommateurs. La nécessité de H4 est démontrée par la proposition 2, ci-dessous.

PROPOSITION 1. Sous H1 à H4, il existe un équilibre uniforme fort.

Démonstration. Nous pouvons restreindre le vecteur-prix à l'ensemble compact I^S. Puisque $V(x)$ est quasi concave, sous H1-H2, la correspondance de demande d'un consommateur-type $\xi(q)$ de I^S dans R_+^{S+1} est à valeurs convexes compactes non vides et semi continue supérieurement (s.c.s.) (voir Debreu [7]). Son domaine est inclus dans un ensemble convexe et compact C.

$\frac{\Pi(x)}{1+\rho}$ est une fonction continue de C dans I^S.

Soit Ψ, la correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides de l'ensemble convexe compact $C \times I^S$ dans lui-même définie comme :

$$\Psi(x, q) = [\xi(q), \frac{\Pi(x)}{1+\rho}]$$

Par le théorème de Kakutani, elle a un point fixe :

$$q^* = \frac{1}{1+\rho}\Pi(x^*) \qquad \text{pour } x^* \in \xi(q^*)$$

Par conséquent, les conditions (2.1) et (2.3) de la définition d'un équilibre fort sont vérifiées. D'après H2, la loi de Walras est satisfaite pour (x^*, q^*) de sorte que la condition (2.2) est également remplie.

Q.E.D.

Il est clair qu'un équilibre (uniforme) fort est aussi un équilibre (uniforme) faible.

PROPOSITION 2. Sous H1 à H3, il peut ne pas exister d'équilibre ni fort, ni faible.

Démonstration. Nous donnons un exemple, où $V(x)$ n'est pas quasi concave, pour lequel il n'existe pas d'équilibre.

Soit, $\rho = 0$, $S = 2$, $w_0 = 10$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$.

$$U_1(x_0, x_1) = x_0 + 10\, x_1$$
$$U_2(x_0, x_2) = x_0$$
$$\begin{aligned} \Pi_1(x_0) &= 0.9 - 0.1\, x_0 & \text{si } 0 \leqq x_0 \leqq 8 \\ &= 0.1 & \text{si } 8 \leqq x_0 \end{aligned}$$

Le programme d'un consommateur-type peut alors s'écrire :

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} &\text{Max} && x_0 + 10\, \Pi_1(x_0) \cdot x_1 \\ &\text{T.Q.} && x_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2 \leqq 10 + q_1 w_1 + q_2 w_2 \\ &&& x_0, x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

Nous avons représenté sur la figure 1 une carte d'indifférence.

Il est clair que la solution en x_2 de (3.5), x^*_2, est nulle. De plus :

$$\text{Pour } q_1 < 1/9,\ x^*_0 = 0 \qquad x^*_1 = \frac{10 + q_1 w_1 + q_2 w_2}{q_1}$$
$$\text{Pour } q_1 > 1/9,\ x^*_0 = 10 + q_1 w_1 + q_2 w_2 \qquad x^*_1 = 0$$

$q_1 < 1/9$ ne peut pas correspondre à un équilibre puisque $x^*_0 = 0$ implique $\Pi_1(x^*_0) = 0.9 > q_1$, et le contrat d'assurance relatif à l'état 1 est actif puisque :

$$z^*_1 = x^*_1 - w_1 = \frac{10 + q_2 w_2}{q_1} > 0$$

De même $q_1 > 1/9$ correspond à $\Pi_1(x^*_0) = 0.1 < q_1$ et le contrat est actif puisque $z^*_1 = x^*_1 - w_1 = -w_1 < 0$. Le seul équilibre possible est donc un équilibre non uniforme avec $q_1 = 1/9$. Les agents sont alloués en proportion λ, $(0 < \lambda < 1)$, au vecteur $(x^a_0, x^a_1) = (0, \dfrac{10 + q_1 w_1 + q_2 w_2}{q_1})$ et en proportion $1 - \lambda$ au vecteur $(x^b_0, x^b_1) = (10 + q_1 w_1 + q_2 w_2, 0)$. L'équilibre sur le second contrat requiert :

$$P_2 = \lambda\, [q_2 - \Pi_2(x^a_0)]\,(x^a_2 - w_2) + (1 - \lambda)\,[q_2 - \Pi_2(x^b_0)]\,(x^b_2 - w_2) = 0$$

ou

$$q_2 = 0.9 - 0.8\, \lambda$$

De même l'équilibre sur le premier contrat requiert :

$$P_1 = \lambda \, [q_1 - \Pi_1 (x^a_0)] \, (x^a_1 - w_1) + (1 - \lambda) \, [q_1 - \Pi_1 (x^b_0)] \, (x^b_1 - w_1) = 0$$

ou

$$639 \, \lambda \, (10 + q_2 \, w_2) + (1 - \lambda) \, w_1 = 0$$

qui nécessite $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$.

Il n'existe donc pas d'équilibre fort. Existe-t-il des équilibres faibles, c'est-à-dire tels que $P_1 + P_2 = 0$? $P_1 + P_2 = 0$ est équivalent à :

$$\lambda = \frac{90 \, (- q_2 \, w_2 + 0.9 \, w_2) - w_1}{639 \, q_2 \, w_2 + 72 \, w_2 - w_1 + 6390}$$

Selon les valeurs de w_1 et w_2 il existe ou non un équilibre faible.

Par exemple, si $w_2 = 90$ et $w_1 = 80$, $q_1 = 1/9$, $q_2 = 8/9$, $\lambda = 1/6\,398$ est un équilibre.

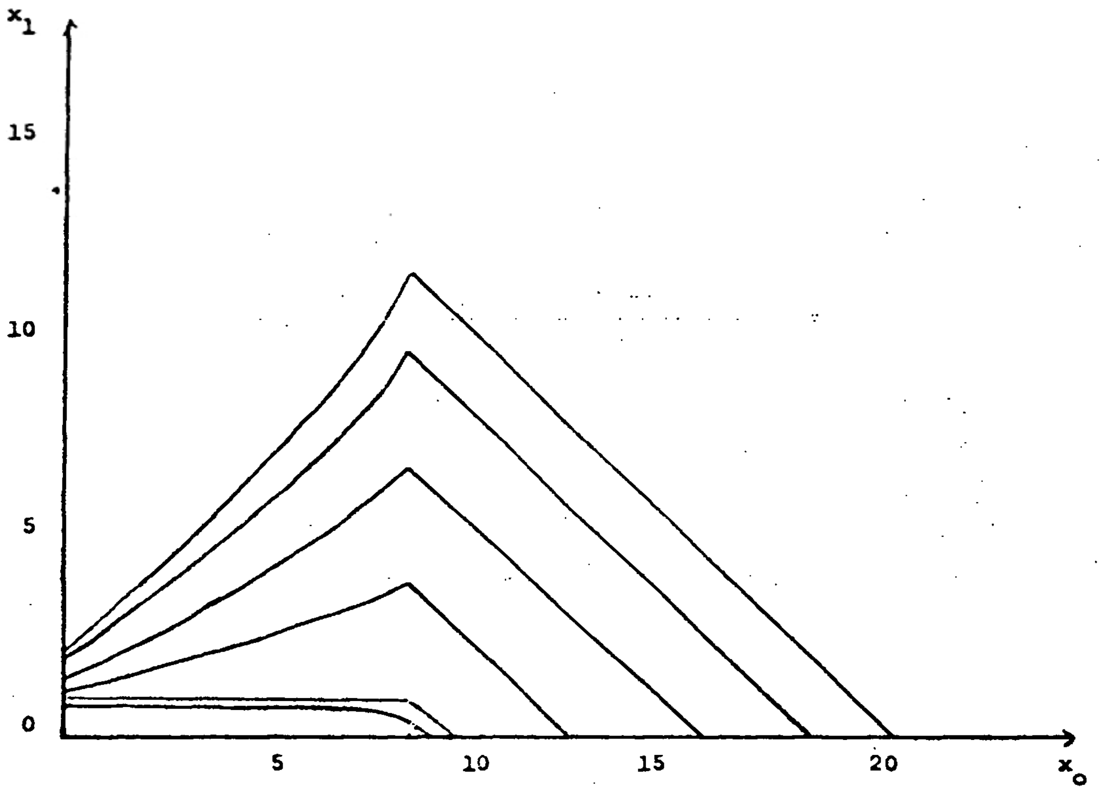
Par contre, si $6\,390 > w_1 > 90 \, w_2$, il n'existe pas de valeur de q_2 positive qui soit compatible avec $0 < \lambda < 1$.

Q.E.D.

L'inexistence d'un équilibre dans l'exemple numérique peut s'expliquer ainsi : quand le prix de l'assurance pour l'état 1 est inférieur à 1/9, les agents achètent une quantité positive d'assurance, mais n'exercent aucune auto-protection. La probabilité d'être dans l'état 1 est par conséquent élevée et la compagnie d'assurance fait des pertes. Quand le prix de l'assurance devient supérieur à 1/9, la non-convexité des préférences cause une modification complète du comportement des agents ; ils achètent une quantité négative d'assurance et un maximum d'auto-protection, ce qui, d'une façon différente, inflige des pertes à la compagnie d'assurance. Quand le prix de l'assurance est exactement 1/9, les agents sont indifférents entre les deux comportements, mais comme la compagnie fait des pertes dans les deux cas, elle fait aussi des pertes pour toute combinaison des deux comportements.

Il est bon de s'interroger sur la signification d'un résultat d'inexistence d'équilibre. Souvent, un tel résultat est la justification *a contrario* d'une institution économique qui apparaît pour secourir le marché. Qu'en est-il ici ? Sans entrer dans les détails, pour lesquels le lecteur peut se reporter à Laffont [14], disons que l'inexistence d'équilibre ne semble pas poser de difficulté fondamentale à la viabilité du modèle. En effet, il est possible de le modifier quelque peu, pour aboutir à un modèle dans lequel l'absence d'un seul marché d'assurance (que l'on peut interpréter comme correspondant à l'état de l'économie pour lequel il n'y a pas d'accident) permet de démontrer l'existence d'un

FIGURE 1



équilibre *non uniforme*. Dans l'exemple ci-dessus, cette hypothèse revient à supprimer la possibilité de s'assurer négativement dans l'état 1. Cette hypothèse permet d'obtenir l'existence d'un équilibre, bien que l'optimum contraint par l'absence de ce « marché » reste optimum de Pareto.

La non-uniformité de l'équilibre pose toutefois des problèmes d'existence d'une autre nature (voir note de bas de page n° 6 et Rothschild-Stiglitz [23]).

4. INEFFICACITÉ DE L'ÉQUILIBRE

Nous ignorons dans cette section le problème d'existence (en supposant par exemple que V (x) est quasi concave) et nous étudions les propriétés des équilibres lorsqu'ils existent. En particulier, nous montrons que, de façon très générale, les équilibres concurrentiels sont inefficaces au sens de Pareto.

Après avoir donné un exemple d'équilibre concurrentiel inefficace.

nous montrons sous des hypothèses de différentiabilité que l'équilibre est localement inefficace. Enfin, nous donnons une interprétation du résultat en termes d'effets externes.

Définition. $[A, (\lambda_a), (x^a)]$ est une allocation réalisable si :

(4.1) A est un ensemble fini et A = {union de tous les a}.

(4.2) $\lambda_a > 0$ pour tout $a \in A$ et $\sum_{a \in A} \lambda_a = 1$.

(4.3) $x^a \geqq 0$ pour tout $a \in A$ et $\sum_{a \in A} \lambda_a \sum_{s=0}^{S} \Pi_s (x^a{}_0) (x^a{}_s - w_s) \leqq 0$

avec la convention $\Pi_0 (x^a{}_0) = 1 + \rho$.

Définition. $[A^*, (\lambda_{a*}), (x^{a*})]$ est une allocation efficace si :

(4.4) $[A^*, (\lambda_{a*}), (x^{a*})]$ est une allocation réalisable.

(4.5) Il n'existe pas d'autre allocation réalisable $[A, (\lambda_a), (x^a)]$ telle que A puisse être divisé en $\# A^*$ sous-ensembles disjoints A^{a*}, $a^* \in A^*$, tels que :

(1) $\sum_{a \in A^{a*}} \lambda_a = \lambda_{a*}$ pour tout $a^* \in A^*$.

(2) $V(x^a) \geqq V(x^{a*})$ pour tout $a^* \in A^*$, $a \in A^{a*}$, avec une inégalité stricte pour au moins un couple $(a', a^{*\prime})$, $a^{*\prime} \in A^*$, $a' \in A^{a*\prime}$.

Proposition 4.1. Sous H1-H4, un équilibre peut ne pas être efficace.

Démonstration. Nous construisons un exemple d'un équilibre uniforme fort qui est inefficace.

Soit

$$\rho = 0,\ S = 2,\ w_0 = w_1 = w_2 = 10$$
$$\Pi_1 (x_0) = 0.9 - 0.8\ \epsilon^{-x_0}$$
$$U_1 (x_0, x_1) = x_1$$
$$U_2 (x_0, x_1) = 0$$

L'optimum de Pareto est solution du programme suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 (0.9 - 0.8\ \epsilon^{-x_0}) \\ \text{T.Q.} & x_0 + (0.9 - 0.8\ \epsilon^{-x_0}) \cdot x_1 = 20 \\ & x_0, x_1 \geq 0 \end{array}$$

La solution est évidemment $x_0 = 0$, $x_1 = 200$, soit un niveau d'utilité $V^0 = 20$.

L'allocation d'équilibre est obtenue de la façon suivante : le programme d'un consommateur est défini par

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 \, (0.9 - 0.8 \; \epsilon^{-x_0}) \\ \text{T.Q.} & x_0 + q_1 \, x_1 = 20 \end{array}$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$(0.9 - 0.8 \; \epsilon^{-x_0}) = \lambda \; q_1$$
$$0.8 \; x_1 \, . \, \epsilon^{-x_0} = \lambda$$

L'équilibre de la compagnie d'assurance nécessite :

$$q_1 = \Pi_1 \, (x_0), \text{ soit } \lambda = 1, \text{ ou encore } x_1 = \frac{\epsilon^{x_0}}{0.8}$$

Soit x^*_0 la solution (unique et positive) de l'équation budgétaire :

$$x_0 + (0.9 - 0.8 \; \epsilon^{-x_0}) \; . \; \frac{\epsilon^{x_0}}{0.8} = 20$$

L'équilibre correspond à :

$$q_1 = 0.9 - 0.8 \; \epsilon^{-x^*_0}$$
$$x_0 = x^*_0$$
$$x_1 = \frac{\epsilon^{x^*_0}}{0.8}$$

et au niveau d'utilité :

$$V^E = 20 - x^*_0$$

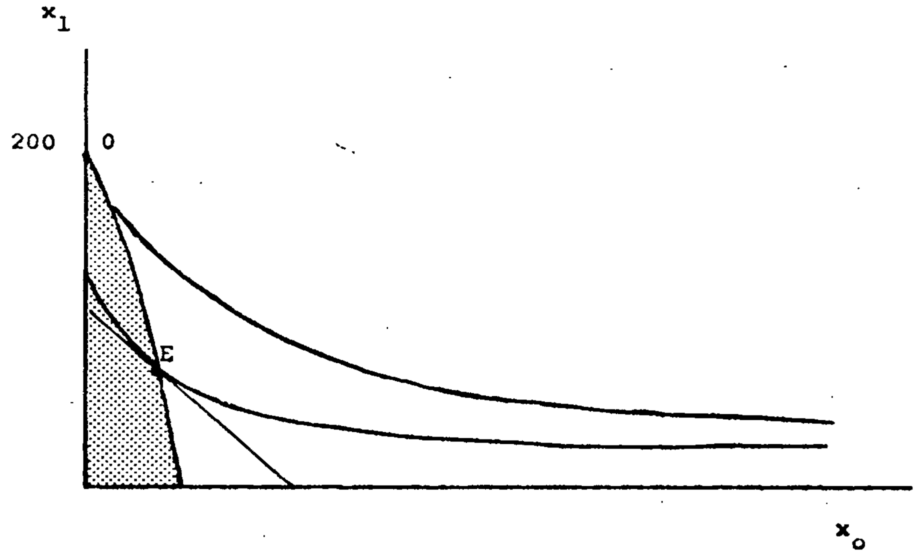
Q.E.D.

Sur cet exemple, il apparaît clairement que le comportement décentralisé conduit à une auto-protection qui est un gaspillage sur le plan collectif.

En dehors de la taxation ou de la prime variable discutée dans la suite de la section, il apparaît dans le cas de l'exemple qu'une solution simple est de supprimer le marché pour le bien préventif. On se trouve donc dans un cas où avec un ensemble d'institutions restreint, l'équilibre concurrentiel est préférable (voir Green-Sheshinski [11], pour un exemple analogue).

Ce résultat trouve son interprétation générale dans la théorie du second rang (Je suis redevable à Roger Guesnerie d'une discussion éclairante sur ce point). Une organisation particulière (à la Arrow-Debreu) qui permettrait d'obtenir un optimum de Pareto impliquerait des marchés d'assurance pour chaque valeur de x_0. Nous pouvons considérer que nous avons supprimé un certain nombre de marchés Arrow-Debreu. Nous sommes donc dans un cadre de second rang. Il est alors clair que la suppression d'un marché supplémentaire conduit à un équilibre qui en général n'est pas comparable, au sens de Pareto, à l'équilibre précédent et peut éventuellement être meilleur.

FIGURE 2



La zone ombrée représente l'ensemble des **réalisables**
O : Optimum
E : Equilibre

L'exemple que nous venons de donner pourrait suggérer que l'équilibre est globalement inefficace mais localement efficace. Il n'en est rien.

HYPOTHÈSE 5. V (x) est strictement quasi concave et différentiable.

PROPOSITION 4.2. Sous H1-H5 l'équilibre est en général localement inefficace.

Démonstration. Soit $(\bar{q}, \bar{x})$ un équilibre uniforme fort qui est intérieur. La contrainte de ressources s'écrit :

$$(1 + \rho)\ (x_0 - w_0) + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ (x_s - w_s) = 0 \tag{4.6}$$

Nous différencions (4.6) pour obtenir les variations possibles autour de l'équilibre.

$$(4.7) \qquad (1+\rho)\, dx_0 + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s(x_0)\, dx_s + \left[\sum_{s=1}^{S} \frac{d\,\Pi_s(x_0)}{d\,x_0} \cdot (x_s - w_s)\right] dx_0 = 0$$

Les conditions du premier ordre de l'équilibre sont obtenues à partir du programme suivant :

$$\text{Max} \quad \sum_{s=1}^{S} \Pi_s(x_0)\, U_s(x_0, x_s)$$

$$\text{T.Q.} \quad x_0 + \sum_{s=1}^{S} q_s\, x_s \leqq w_0 + \sum_{s=1}^{S} q_s\, w_s$$

$$(4.8) \qquad \sum_{s=1}^{S} \left\{\frac{d\,\Pi_s(x_0)}{d\,x_0} U_s(x_0, x_s) + \Pi_s(x_0) \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_0}(x_0, x_s)\right\} = \lambda$$

$$\Pi_s(x_0) \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_s}(x_0, x_s) = \lambda\, q_s = \lambda\, \Pi_s(x_0) \,/\, (1+\rho) \qquad \text{à l'équilibre}$$

$$s = 1, \ldots, S$$

Pour savoir si nous pouvons améliorer localement l'allocation d'équilibre, nous différencions la fonction d'utilité à l'équilibre :

$$(4.9) \qquad \sum_{s=1}^{S} \left[\frac{d\,\Pi_s(x_0)}{d\,x_0} U_s(x_0, x_s) + \Pi_s(x_0) \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_0}(x_0, x_s)\right] dx_0$$

$$+ \sum_{s=1}^{S} \Pi_s(x_0) \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_s}(x_0, x_s)\, dx_s$$

Nous substituons (4.8) dans (4.9).

$$(4.10) \qquad (1+\rho)\, \lambda\, dx_0 + \lambda \sum_{s=1}^{S} \Pi_s(x_0)\, dx_s$$

D'après (4.7) :

$$(4.11) \qquad -\lambda \left[\sum_{s=1}^{S} \frac{d\,\Pi_s(x_0)}{d\,x_0} (x_s - w_s)\right] dx_0$$

Nous savons que λ, utilité marginale du revenu, est positive. Selon le signe de $\prod_{s=1}^{S} \frac{d\,\Pi_s(x_0)}{d\,x_0} (x_s - w_s)$, le signe de la variation $d\,x_0$ peut être choisi de sorte que (4.11) soit négatif. L'équilibre est donc localement inefficace. Notons deux cas particuliers : si Π_s est constant.

$s = 1, \ldots, S$, l'expression (4.11) disparaît. De même, si $x_s - w_s = a$ pour tout s,

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{d\,\Pi_s\,(x_0)}{d\,x_0} \,.\, (x_s - w_s) = a \sum_{s=1}^{S} \frac{d\,\Pi_s\,(x_0)}{d\,x_0} = 0$$

$$\text{puisque} \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\,(x_0) = 1 \text{ pour tout } x_0$$

Q.E.D.

L'analogie suivante en termes d'effets externes permet de se faire une idée plus intuitive du résultat d'inefficacité.

La compagnie d'assurance peut être considérée comme un producteur dont l'input est une unité de bien dans la première période et l'output, un produit joint, constitué de α_s unités de bien consommable seulement par des consommateurs âgés dans l'état s, $s = 1, \ldots, S$. La fonction de production fictive est donnée par la contrainte budgétaire de la compagnie d'assurance :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_s = \dfrac{1+\rho}{\Pi_s\,(x_0)} \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{\alpha_s} = 1+\rho \end{array} \right.$$

où x_0 est la consommation individuelle des jeunes agents. Le comportement de ces agents influence les coefficients techniques du producteur « compagnie d'assurance ». Il y a donc externalité de consommation sur la production [7]. Il est rationnel pour un consommateur de négliger son impact sur ces coefficients techniques en raison du grand nombre d'agents.

Puisque l'équilibre concurrentiel est inefficace, il est bon de s'interroger sur l'existence de politiques économiques qui permettent de rétablir l'optimalité paretienne. C'est l'objet des deux sections suivantes.

7. Il s'agit d'une externalité d'atmosphère (cf. Meade [17]) pour laquelle il est bien connu qu'un système de taxe optimal non personnalisé existe en général.

5 7 8

5. SOLUTIONS DE PREMIER RANG A L'INEFFICACITÉ DE L'ÉQUILIBRE CONCURRENTIEL

A. Prime d'assurance variable

L'inefficacité de l'équilibre concurrentiel vient de la dépendance des distributions de probabilité des états vis-à-vis de variables manipulées par les agents économiques ; une solution simple est bien sûr d'avoir une prime d'assurance qui prend en compte l'hétérogénéité des risques.

PROPOSITION 5.1. Si la prime d'assurance est définie par $q_s = \dfrac{\Pi_s\ (x_0)}{1+\rho}$, $s = 1, ..., S$, sous H1-H4, il existe un équilibre uniforme fort qui est Pareto efficace.

Démonstration. Un consommateur-type a maintenant le programme suivant :

(5.1)
$$\text{Max } V\ (x)$$
$$\text{T.Q.} \quad (1+\rho)\ (x_0 - w_0) + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ (x_s - w_s) \leqq 0$$
$$x_s \geq 0 \qquad s = 0, 1, ..., S$$

Il existe une solution puisque V (x) est continue et l'ensemble budgétaire compact. Toute solution ou toute combinaison convexe de solutions est un équilibre efficace.

Soit $[\Delta^*, (\lambda_{\delta *}), (x^{\delta *})]$ une combinaison convexe de solutions du programme (6.1).

Supposons qu'il existe une allocation réalisable et préférée, $[\Delta, (\lambda_\delta), (x^\delta)]$, i.e., telle qu'il existe $\delta' \in \Delta$ avec $U\ (x^{\delta'}) > U\ (x^{\delta *})$ et $U\ (x^\delta) \geqq U\ (x^{\delta *})$ pour tout autre δ.

D'après la contrainte de possibilité,

— ou bien

$$a) \quad (1+\rho)\ (x^\delta{}_0 - w_0) + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x^\delta{}_0)\ (x^\delta{}_s - w_s) \leqq 0 \text{ pour tout } \delta \in \Delta$$

— ou bien

$b)$ il existe $\delta'' \in \Delta : (1+\rho)\ (x^{\delta''}{}_0 - w_0) + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x^{\delta''}{}_0)\ (x^{\delta''}{}_s - w_s) < 0$

Dans le cas $a)$, x^{δ} est réalisable pour tout $\delta \in \Delta$, de sorte que $U\ (x^{\delta}) \leqq U\ (x^{\delta *})$ pour tout $\delta \in \Delta$, une contradiction.

Dans le cas $b)$, par H2, $U\ (x^{\delta''}) < U\ (x^{\delta *})$, une contradiction.

Q.E.D.

La politique de prime variable définie par la proposition 5.1 conduit à une allocation efficace des ressources, parce qu'elle oblige chaque agent à prendre en compte, de façon appropriée, non seulement l'effet de l'achat de x_0 sur sa distribution de probabilité, mais aussi l'effet sur les ressources qui résulte d'une redistribution des agents entre les différents états (qui est ici synonyme de l'effet sur les prix des assurances).

Les difficultés « informationnelles » de cette solution sont considérables. La compagnie d'assurance doit connaître la forme des fonctions $\Pi_s\ (.)$, $s = 1, ..., S$, mais aussi elle doit connaître le montant exact x_0 pour chaque agent. Notons toutefois que la prime est linéaire par rapport à la quantité d'assurance achetée et donc compatible avec une certaine concurrence entre les compagnies d'assurance.

B. Taxation

L'analogie avec les externalités, évoquée à la section 3, suggère la possibilité de taxation.

Proposition 5.2. Sous H1-H5, il existe un système de taxes, qui soutient une allocation efficace :

$$\begin{cases} t_0 = \sum_{s=1}^{S} \left. \dfrac{d\,\Pi_s}{dx_0} \right|_{x_0 = x^*_0} (x^*_s - w_s) \\ t_s = 0 \qquad\qquad s = 1, ..., S \end{cases}$$

où t_0 est le taux de taxation sur la consommation des jeunes agents et t_s le taux de taxation sur la consommation des agents âgés dans l'état $s = 1, ..., S$.

Démonstration : Soit x^* une allocation (intérieure) efficace, solution de :

$$\text{Max } V(x)$$

$$\text{T.Q.} \quad (1+\rho)\ (x_0 - w_0) + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ (x_s - w_s) = 0$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\sum_{s=1}^{S} \left[\frac{d\,\Pi_s\ (x_0)}{dx_0}\ U_s\ (x_0, x_s) + \Pi_s\ (x_0)\ \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_0}\ (x_0, x_s)\right] =$$

$$\mu\ \left[1+\rho + \sum_{s=1}^{S} \frac{d\,\Pi_s\ (x_0)}{dx_0}\ (x_s - w_s)\right]$$

$$\Pi_s\ (x_0)\ .\ \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_s}\ (x_0, x_s) = \mu\ \Pi_s\ (x_0) \qquad s = 1, \ldots, S$$

D'autre part, le problème d'optimation d'un consommateur dans une économie avec taxation s'écrit :

$$\text{Max } V(x)$$

$$\text{T.Q.} \quad x_0\ (1+t_0) \leqq w_0 - \sum_{s=1}^{S} z_s\ q_s$$

$$x_s\ (1+t_s) \leqq w_s + z_s \qquad s = 1, \ldots, S$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\sum_{s=1}^{S} \left[\frac{d\,\Pi_s}{dx_0}\ U_s\ (x_0, x_s) + \Pi_s\ (x_0)\ \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_0}\ (x_0, x_s)\right] = \mu\ (1+t_0)$$

$$\Pi_s\ (x_0)\ \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_s}\ (x_0, x_s) = \mu\ q_s\ (1+t_s)$$

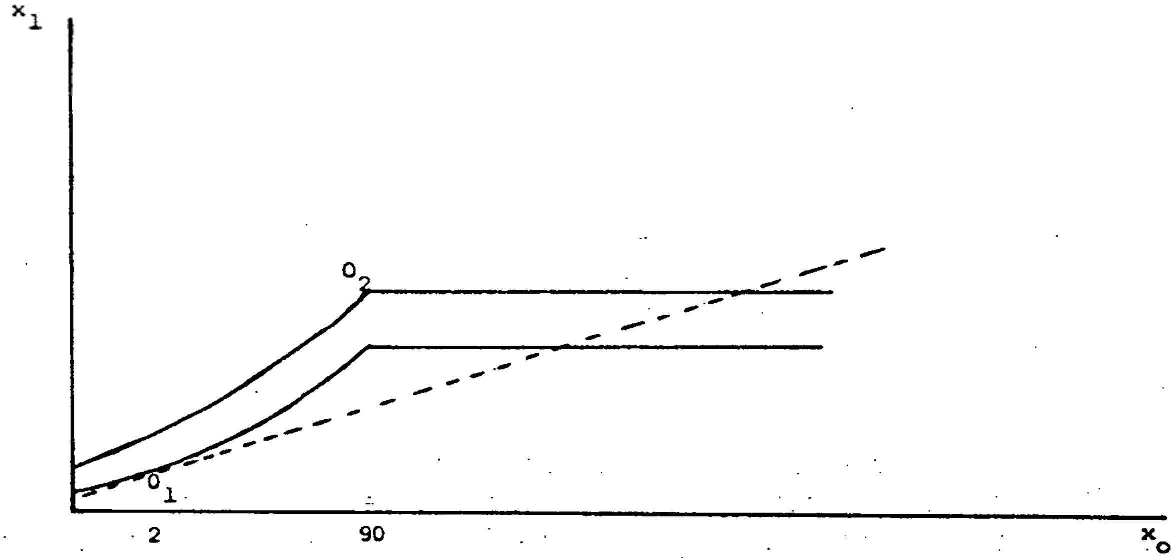
avec à l'équilibre $q_s = \dfrac{\Pi_s\ (x_0)}{1+\rho}$

L'identification des deux ensembles de conditions du premier ordre donne le résultat.

Q.E.D.

Notons que ce système de taxes a des traits particuliers. Les jeunes agents payent des taxes différentes de celles payées par les vieux. S'il y avait plusieurs types d'agents, chaque type aurait son système de taxes, d'où l'hypothèse implicite que les vendeurs sont capables et désireux de taxer différemment des agents différents.

FIGURE 3



L'optimum 0_1 (pour $w_2 = 106$) est obtenu avec $x_0 = 2$. Il est clair sur la figure qu'il ne peut être supporté globalement par un système de taxes, bien qu'il le soit localement. Si $w_2 = 106/8 - 10$, l'optimum 0_2, obtenu avec $x_0 = 90$, ne peut même pas être supporté localement.

Quand $V(x)$ n'est pas quasi concave, un système de taxes efficace peut encore exister [8] (comme dans un exemple du type de celui de la section 3 quand un équilibre existe). Cependant, en général, il ne sera pas possible de supporter le point efficace, même localement par un système de prix. Les non-convexités du problème empêchent donc la solution de taxation. Nous donnons ci-après un exemple où la taxation est impossible.

Soit

$$S = 2, \quad U_1(x_0, x_1) = x_1, \quad U_2(x_0, x_2) = 0 \qquad \rho = 0$$

$$w_0 = 10 \qquad w_1 = 10 \qquad w_2 = 106$$

$$\Pi_1(x_0) = 9\,(x_0 + 10)^{-2} \qquad 0 \leqq x_0 \leqq 90$$

$$= 9\ 10^{-4} \qquad x_0 \geqq 90$$

8. Lorsqu'il est possible de supporter globalement le point efficace mais qu'il existe des non-convexités, il est très difficile de trouver les taxes optimales et les processus itératifs de recherche de taxes optimales peuvent converger vers des solutions non optimales.

6. SOLUTIONS DE SECOND RANG

Les politiques économiques proposées à la section 5 sont extrêmement coûteuses en termes d'information. En particulier, la solution d'une prime d'assurance variable est très séduisante, mais les coûts de contrôle *ex ante* du niveau des variables (appelées « soins » dans cette section) qui influencent les probabilités sont souvent prohibitifs. Une autre approche est attrayante. Est-il possible de relier les primes d'assurance à des variables plus facilement identifiables et d'améliorer ainsi l'allocation des ressources par rapport à l'équilibre concurrentiel sans toutefois atteindre un optimum de Pareto ? Deux telles solutions sont étudiées ci-après.

A. Pauly [21] a suggéré récemment de relier la prime à la quantité totale d'assurance achetée d'une façon non linéaire, tout en conservant la contrainte de profits nuls pour la compagnie d'assurance. L'idée est d'utiliser la quantité de co-assurance comme signal d'auto-protection. Notons que les coûts à supporter pour trouver une *fonction* prime d'équilibre sont certainement d'un autre degré de grandeur que les coûts nécessaires pour trouver un prix d'équilibre. Etudions cette proposition en modifiant quelque peu notre modèle.

Soit $\bar{w}$ le niveau de revenu de la 2ᵉ période par rapport auquel sont définies les pertes $l_s = \bar{w} - w_s$, $s = 1, ..., S$; nous supposons que les valeurs des paramètres sont telles que les agents veulent s'assurer positivement pour tous les états de la deuxième période (cette hypothèse simplificatrice nous permet d'utiliser encore ce modèle particulièrement simple). Soit α_s la proportion de la perte l_s pour laquelle l'agent désire s'assurer et soit $q_s(\alpha_s)$ le prix unitaire d'assurance pour l'état s si l'agent assure une proportion α_s de sa perte. ($\rho = 0$ par simplicité).

Proposition 6.1. Considérons un optimum de Pareto ; sous des hypothèses appropriées de concavité, il existe une infinité de fonctions $q_s(\alpha_s)$ qui permettent de décentraliser l'optimum ; elles sont caractérisées par leur valeur à l'équilibre et la valeur de leur dérivée à l'équilibre.

Démonstration. Le programme d'un consommateur face à une fonction prime $q_s\ (\alpha_s)$ s'écrit :

$$\text{(6.1)} \qquad \text{Max} \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ U_s\ (x_0,\ x_s)$$

$$\text{S.T.} \quad x_0 = w_0 - \sum_{s'=1}^{S} q_{s'}\ (\alpha_{s'})\ 1_{s'}\ \alpha_{s'}$$

$$x_s = \bar{w} - (1 - \alpha_s)\ 1_s \qquad s = 1, \ldots, S$$

$$x_s \geq 0 \qquad s = 0, 1, \ldots, S$$

$$\alpha_s \geq 0 \qquad s = 1, \ldots, S$$

Les conditions du premier ordre d'un maximum intérieur sont :

$$[\alpha_s \frac{d\, q_s}{d\, \alpha_s}(\alpha_s) + q_s\ (\alpha_s)] \cdot \sum_{s'=1}^{S} [U_{s'} \frac{d\, \Pi_{s'}}{d\, x_0} + \Pi_{s'} \frac{\partial\, U_{s'}}{\partial\, x_0}] = \Pi_s\ (x_0)\ \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_s}$$

$$s = 1, \ldots, S$$

Les optima sont caractérisés par le programme suivant :

$$\text{(6.2)} \qquad \text{Max} \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ U_s\ (x_0,\ x_s)$$

$$\text{S.T.} \quad x_0 + \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ (x_s + 1_s) = w_0 + \bar{w}$$

$$x_s \geq 0 \qquad s = 0, \ldots, S$$

Les conditions du premier ordre d'un optimum intérieur sont :

$$\sum_{s'=1}^{S} [U_{s'} \frac{d\, \Pi_{s'}}{d\, x_0} + \Pi_{s'} \frac{\partial\, U_{s'}}{\partial\, x_0}] = \frac{\partial\, U_s}{\partial\, x_s} [1 + \sum_{s'=1}^{S} \frac{d\, \Pi_{s'}}{d\, x_0}\ (\bar{w} + \alpha_{s'}\ 1_{s'})]$$

$$s = 1, \ldots, S$$

Ces conditions se simplifient quelque peu car

$$\sum_{s'=1}^{S} \frac{d\, \Pi_{s'}}{d\, x_0}\ \bar{w} = \bar{w} \sum_{s'=1}^{S} \frac{d\, \Pi_{s'}}{d\, x_0} = 0 \text{ puisque } \sum_{s'=1}^{S} \Pi_{s'}\ (x_0) = 1$$

L'identification des deux ensembles de conditions du premier ordre donne :

$$\text{(6.3)} \qquad \frac{\Pi_s\ (x_0)}{\alpha_s \dfrac{d\, q_s}{d\, \alpha_s}\ (\alpha_s) + q_s\ (\alpha_s)} = 1 + \sum_{s'=1}^{S} \frac{d\, \Pi_{s'}}{d\, x_0}\ \alpha_{s'}\ 1_{s'}$$

L'équilibre budgétaire de la compagnie d'assurance exige :

$$\alpha_s \, 1_s \, \Pi_s \, (x_0) = q_s \, (\alpha_s) \, \alpha_s \, 1_s$$

ou

$$\Pi_s \, (x_0) = q_s \, (\alpha_s)$$

Si nous portons cette contrainte dans (6.3), nous obtenons une condition que doit vérifier l'élasticité de la fonction q_s (.) à l'équilibre :

$$e_q \, (\alpha_s) = - \frac{d \, q_s}{d \, \alpha_s} \cdot \frac{\alpha_s}{q_s} = \frac{a}{1+a}$$

avec

$$a = \sum_{s'=1}^{S} \frac{d \, \Pi_{s'}}{d \, x_0} \, \alpha_{s'} \, 1_{s'}$$

Par conséquent, les conditions du premier ordre imposent à la tarification les deux contraintes à l'équilibre :

$$q_s \, (\alpha^*_s) = \Pi_s \, (x_0) \qquad s = 1, .., S$$

$$e_q \, (\alpha^*_s) = \frac{a^*}{1+a^*} \qquad s = 1, ..., S$$

Q.E.D.

Notons que lorsque Π_s (.) ne dépend pas de x_0, $s = 1, ..., S$, nous retrouvons que q_s doit être indépendant de α_s.

Il y a deux types de difficultés dans une telle solution. La première est technique et concerne la multiplicité d'équilibres que l'on peut obtenir avec des fonctions q_s données. Certains de ces équilibres ne sont pas des optima de Pareto même si les fonctions q_s (.) satisfont les conditions données ci-dessus. On peut espérer que la concurrence des compagnies d'assurance éliminera de tels équilibres. La deuxième difficulté concerne les exigences informationnelles de cette solution. Il est vrai qu'en principe, à l'équilibre, la compagnie d'assurance n'a pas besoin de connaître x_0. Cependant, pour parvenir à un tel équilibre cette connaissance semble indispensable. De plus, les compagnies doivent se transmettre de l'information pour savoir quels contrats l'agent a déjà signé et pour pouvoir lui appliquer la prime non linéaire q_s (.). Si la prime q_s (.) satisfait la condition d'équilibre budgétaire mais ne satisfait pas la condition d'élasticité, l'équilibre n'est pas un optimum de Pareto. Une question non résolue est : quelles conditions doivent satisfaire q_s (.), $s = 1, ..., S$, pour que cet équilibre à primes non linéaires soit préférable à l'équilibre concurrentiel défini à la section 2 ?

B. Nous suggérons dans cette sous-section une autre solution basée sur la simple remarque suivante. Les états qui donnent lieu à assurance et qui correspondent en général à des « accidents » ont de faibles probabilités, de sorte que seule une faible proportion de la population est en fait dans ces états. L'idée est donc de remplacer le contrôle *ex ante* des soins sur tous les agents, par un contrôle *ex post* sur les seuls agents ayant des accidents. Quand un consommateur achète une quantité d'assurance, il annonce à la compagnie la quantité de soins qu'il va prendre dans la première période. Les primes sont calculées d'après cette *déclaration*. Après l'accident, la quantité de soins annoncée fait l'objet d'une enquête. Nous supposons qu'il existe une *Cour de justice* qui est chargée de juger l'exactitude de la déclaration de l'assuré. S'il est établi par la Cour qu'il a trompé l'assurance, celle-ci n'a pas à payer les indemnités spécifiées dans le contrat. Pour éviter partiellement les coûts de transaction élevés du système judiciaire, la compagnie d'assurance peut conduire sa propre enquête et n'aller devant la Cour que si elle est en désaccord avec son client (ou pense qu'elle peut gagner le procès). Car il est évident que la Cour ne sera pas parfaite, en particulier à cause des pertes d'information dues au décalage temporel entre la date de l'action et la date de l'enquête. Dans de nombreux cas, il est possible néanmoins de réaliser un contrôle *ex post* précis lorsque, par exemple, il s'agit de l'existence d'un procédé anti-feu. Dans d'autres cas, cela est plus difficile ou même impossible.

Soit x_0 le niveau de soins réel et $\tilde{x}_0$ le niveau de soins annoncé.

La Cour de justice est une variable aléatoire qui prend les valeurs un et zéro (signifiant non coupable de négligence ou coupable) avec les probabilités $\Psi\ (x_0 - \tilde{x}_0)$ et $1 - \Psi\ (x_0 - \tilde{x}_0)$ qui dépendent de l'écart entre les valeurs réelle et annoncée de soins.

Une décision de la Cour est une valeur de cette variable aléatoire.

Π_s (.) est maintenant supposé décroissante, $s = 2, ..., S$.

Si $\Psi\ (y) = 1$ pour $y \geq 0$ et $\Psi\ (y) = 0$ pour $y < 0$ la Cour est infaillible.

Soit $\tilde{\Pi}\ (\tilde{x}_0)$ la fonction prime dépendant du niveau de soins *annoncé*, qui est proposée par la compagnie d'assurance.

Dans les notations des sections précédentes, le problème d'optimation du consommateur peut s'écrire maintenant :

$$\text{Max} \quad \sum_{s=1}^{S} \Pi_s\ (x_0)\ [\Psi\ (x_0 - \tilde{x}_0)\ U_s\ (x_0, x_s) + (1 - \Psi\ (x_0 - \tilde{x}_0))\ U_s\ (x_0, w_s)]$$

$$\text{T.Q.} \quad x_0 = w_0 - \sum_{s=2}^{S} \tilde{\Pi}_s \, (\tilde{x}_0) \, z_s$$

$$x_s = w_s + z_s \qquad s = 1, \ldots, S$$

$$x_s \geqq 0 \qquad s = 0, 1, \ldots, S$$

où $\Psi \, (x_0 - \tilde{x}_0)$ est l'anticipation de la Cour par le consommateur. Une fonction prime d'équilibre sera une fonction $\tilde{\Pi}_s \, (\tilde{x}_0)$, $s = 1, \ldots, S$, compatible avec des profits nuls pour la compagnie d'assurance.

On peut alors démontrer les propositions suivantes (voir [14] pour un énoncé rigoureux et des démonstrations).

Proposition 6.2. Sous des hypothèses de concavité sur l'espérance mathématique de l'utilité, il existe un équilibre.

Proposition 6.3. Si la Cour est infaillible, l'équilibre est un optimum de Pareto.

Proposition 6.4. Si la Cour est presque infaillible (dans un sens topologique précis), l'équilibre est presque un optimum de Pareto.

Cette dernière proposition est importante car elle démontre l'utilité de ce système lorsque la Cour n'est pas parfaite.

7. CONCLUSION

L'analyse d'équilibre général à laquelle nous nous sommes livrés nous a permis de cerner un certain nombre de difficultés passées inaperçues dans l'analyse partielle du problème d'auto-protection. Tout d'abord les non-convexités fondamentales du problème peuvent conduire parfois à l'impossibilité d'une décentralisation et induisent souvent de délicats problèmes de sélection adverse. L'inefficacité de l'équilibre concurrentiel nous a conduit à analyser un certain nombre de solutions possibles ; dans chaque cas particulier, une analyse des flux d'information disponibles permettra de juger quelle solution est préférable. Souvent, ces différentes solutions seront combinées. Ainsi, on peut imaginer une prime dépendant d'un signal que la compagnie considère lié à x_0, de la proportion de la perte assurée, de la déclaration de l'agent x_0, sachant par ailleurs que l'Etat taxe un bien dont la consommation est particulièrement défavorable au risque.

J'espère que cette note permet de comprendre un peu mieux la rationalité économique de ces diverses mesures. N'oublions pas toutefois les limites de notre modèle, en particulier l'hypothèse que les types d'agents sont identifiables, qui a permis d'isoler *une partie* du problème créé par l'asymétrie d'information entre consommateurs et compagnies d'assurances.

Le problème que nous avons analysé est en fait immergé dans un problème encore plus complexe d'asymétrie informationnelle.

JEAN-JACQUES LAFFONT
Maître de conférences
à l'Ecole Polytechnique

REFERENCES

[1] AKERLOF G.A., « The Market for "Lemons" : Quality Uncertainty and the Market Mechanism », *Quarterly Journal of Economics*, vol. 84, 1970, pp. 488-500.

[2] ARROW K.J., « The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing », *Review of Economic Studies*, vol. 41, 1963-64, pp. 91-96.

[3] ARROW K.J., « Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care », *American Economic Review*, vol. 53, 1963, pp. 941-973.

[4] ARROW K.J., « The Economics of Moral Hazard : Further Comment », *American Economic Review*, vol. 58, 1968, pp. 537-539.

[5] ARROW K.J., « Optimal Insurance and Generalized Deductibles », *Scand. Actuarial Journal*, 1974, pp. 1-42.

[6] BORCH K., *The Mathematical Theory of Insurance*, Lexington Books, Lexington Massachusetts, 1974.

[7] DEBREU G., *Theory of Value*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959.

[8] DEMSETZ H., « Information and Efficiency : Another Viewpoint », *Journal of Law and Economics*, vol. 12, 1959, pp. 1-22.

[9] EHRLICH I., BECKER G.S., « Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection », *Journal of Political Economy*, vol. 80, 1972, pp. 623-648.

[10] GOULD J.P., « The Expected Utility Hypothesis and the Selection of Optimal Deductibles for a Given Insurance Policy », *Journal of Business*, vol. 42, 1969, pp. 143-151.

[11] GREEN J., SHESHINSKI E., « Competitive Inefficiencies in the Presence of Constrained Transactions », *Journal of Economic Theory*, vol. 10, 1975, pp. 343-357.

[12] HELPMAN E., LAFFONT J.J., « On Moral Hazard in General Equilibrium Theory », *Journal of Economic Theory*, vol. 10, 1975, p. 1-23.

[13] LAFFONT J.J., « Insurance with Moral Hazard in a Monetary Economy », miméo, 1974.

[14] LAFFONT J.J., « Court Against Moral Hazard », *Miméo*, 1974, révisé 1976.

[15] MALINVAUD E., « The Allocation of Individual Risks in Large Markets », *Journal of Economic Theory*, vol. 5, 1972, pp. 312-328.

[16] MALINVAUD E., « Markets for an Exchange Economy with Individual Risks », *Econometrica*, vol. 41, 1973, pp. 383-410.

[17] MEADE J.E., « External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation », *Economic Journal*, vol. 62, 1952, pp. 59-67.

[18] MOSSIN J., « Aspects of Rational Insurance Purchasing », *Journal of Political Economy*, vol. 76, 1968, pp. 553-568.

[19] PASHIGIAN B.P., SCHKADE L.L., MENEFEE G.H., « The Selection of an Optimal Deductible for a Given Insurance Policy », *Journal of Business*, vol. 39, 1966, pp. 35-44.

[20] PAULY M.V., « The Economics of Moral Hazard », *American Economic Review*, vol. 58, 1968. pp. 31-58.

[21] PAULY M.V., « Overinsurance and Public Provision of Insurance : The Roles of Moral Hazard and Adverse Selection », *Quarterly Journal of Economics*, vol. 88, 1974, pp. 44-62.

[22] RADNER R., « Competitive Equilibrium Under Uncertainty », *Econometrica*, vol. 36, 1968, pp. 31-58.

[23] ROTHSCHILD M., STIGLITZ J.E., « Equilibrium in Insurance Markets : The Economics of Imperfect Information », à paraître dans *Quarterly Journal of Economics*.

[24] SMITH V.L., « Optimal Insurance Coverage », *Journal of Political Economy* vol. 76, 1968, pp. 68-77.